

Thèse présentée pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR de  
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

*Discipline : MÉCANIQUE*

Présentée par

**Benoît Semin**

Laboratoire d'accueil :

Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques (FAST), Orsay

---

**Interaction d'une fibre et d'un écoulement en  
géométrie confinée**

---

Soutenue publiquement le 22 septembre 2010, devant le jury composé de :

<b>É. Guazzelli</b>	IUSTI, Marseille	Présidente
<b>M. Fermigier</b>	ESPCI, Paris	Rapporteur
<b>S. Roux</b>	ENS Cachan	Rapporteur
<b>E. de Langre</b>	École polytechnique, Palaiseau	Examineur
<b>B. Maury</b>	Université Paris Sud, Orsay	Examineur
<b>H. Auradou</b>	FAST, Orsay	Directeur de thèse
<b>M. François</b>	FAST, Orsay	Co-directeur de thèse



# Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Harold Auradou pour l'encadrement efficace de cette thèse et pour la grande liberté qu'il m'a laissé dans mon travail. Je tiens particulièrement à remercier Jean-Pierre Hulin pour ses conseils pertinents sur le plan scientifique, pour son enthousiasme constant, sa grande disponibilité et ses corrections détaillées. Je remercie vivement Marc François pour avoir accepté de travailler avec un physicien, et pour les discussions scientifiques franches que nous avons eues.

Je suis reconnaissant envers Marc Fermigier et Stéphane Roux d'avoir pris le temps de relire en détail mon manuscrit et de m'avoir suggéré de nouvelles pistes pour approfondir les questions traitées. Je remercie Élisabeth Guazzelli d'avoir présidé mon jury de thèse, et Emmanuel de Langre d'avoir accepté d'en faire partie.

Je suis redevable envers Bertrand Maury pour m'avoir permis de découvrir les mathématiques appliquées, en m'invitant au Cemracs et en me permettant de travailler avec des membres de son équipe. Je suis très reconnaissant envers Astrid Decoene, Aline Lefebvre-Lepot et Sylvain Faure, qui m'ont patiemment initié aux simulations numériques sérieuses. Merci aussi à Virginie Scelles et Stéphane del Pino pour leur aide concernant les simulations numériques.

Merci beaucoup Marie-Hélène pour ton travail et nos discussions : j'espère que tu verras tes compétences scientifiques reconnues et utilisées. Je remercie Thibaut et Aimie pour leur travail durant leur stage, et pour m'avoir supporté sans se démotiver. Aimie, j'espère que tu te souviendras de la nourriture et des unités françaises lorsque tu rouleras en Jaguar.

Je remercie Xavier Boutillon de m'avoir encadré pour mon enseignement. Je remercie vivement Yannick Peysson pour son enthousiasme ainsi que pour ses conseils et son exemple en matière de pédagogie. Je remercie aussi Philippe Gondret, Pierre-Yves Lagrée et Thomas Loiseleux pour leur réponses à mes questions naïves sur les milieux granulaires, et Jean-Marc Allain pour les discussions sur les bactéries et les grains.

Je remercie les membres de l'équipe technique du Fast, et notamment Alban Aubertin, Raphaël Pidoux, Christian Borget et Lionel Auffray pour leur disponibilité et la qualité de leur travail.

Je remercie tous les doctorants du Fast, notamment Antoine, Jémil, Grégory, Camille, Marie-Charlotte, Floriane, Mourad, Anna, Cyril, pour leur contribution à l'ambiance du labo.

Enfin, je remercie mes parents et ma soeur pour leur soutien constant pendant toutes ces années.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>I</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Traînée en régime de Stokes sur un cylindre confiné</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Dispositif expérimental . . . . .	10
1.2.1 Présentation générale . . . . .	10
1.2.1.1 Cellule . . . . .	10
1.2.1.2 Capteur de force . . . . .	11
1.2.2 Caractéristiques de l'écoulement . . . . .	12
1.2.2.1 Pompe . . . . .	12
1.2.2.2 Fluides . . . . .	12
1.2.3 Cylindres utilisés . . . . .	13
1.3 Principes des simulations numériques . . . . .	15
1.3.1 Calcul de $\lambda_{\parallel}$ . . . . .	15
1.3.1.1 Cas d'un fluide newtonien . . . . .	16
1.3.1.2 Cas d'un fluide rhéofluidifiant . . . . .	17
1.3.2 Calcul de $\lambda_{\perp}$ . . . . .	18
1.3.2.1 Calcul numérique 2D . . . . .	19
1.3.2.2 Calcul analytique 2D . . . . .	19
1.3.2.3 Comparaison des résultats numériques et analytique 2D . . . . .	21
1.3.2.4 Calcul numérique 3D . . . . .	21
1.4 Résultats expérimentaux et numériques pour $\lambda_{\parallel}$ . . . . .	22
1.4.1 Traînée en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement . . . . .	22
1.4.1.1 Fluide newtonien en régime de Stokes . . . . .	22
1.4.1.2 Fluide newtonien en régime inertiel . . . . .	23
1.4.1.3 Fluide non-newtonien en régime visqueux . . . . .	23
1.4.2 Variation de la traînée avec la viscosité . . . . .	25
1.4.3 Champ de vitesse numérique . . . . .	25
1.4.4 Variation de $\lambda_{\parallel}$ avec le diamètre . . . . .	26
1.4.4.1 Traitement des données expérimentales . . . . .	26
1.4.4.2 Influence de la nature du cylindre . . . . .	28
1.4.4.3 Influence des parois latérales . . . . .	28
1.4.4.4 Variation de $\lambda_{\parallel}$ avec $\beta$ . . . . .	28
1.4.5 Variation de $\lambda_{\parallel}$ avec la position $G_y$ du cylindre dans l'ouverture . . . . .	29
1.5 Résultats expérimentaux et numériques pour $\lambda_{\perp}$ . . . . .	30
1.5.1 Position du cylindre dans la cellule . . . . .	30

1.5.2	Variation de la force avec la vitesse du fluide . . . . .	32
1.5.3	Champs de vitesse et de pression . . . . .	32
1.5.4	Variation de $\lambda_{\perp}$ avec le diamètre et la position du cylindre dans l'ouverture . . . . .	34
1.5.5	Variation de $\lambda_{\perp}$ avec la longueur du cylindre . . . . .	34
1.6	Conclusion . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Oscillation d'un cylindre confiné entre deux plaques</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Dispositif et résultats expérimentaux . . . . .	41
2.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	41
2.2.2	Oscillation du cylindre . . . . .	42
2.2.3	Amplitude et fréquence de l'oscillation . . . . .	43
2.2.4	Test des interprétations les plus simples . . . . .	45
2.2.4.1	Influence de la gravité . . . . .	45
2.2.4.2	Une instabilité de Bénard-Von Kármán ? . . . . .	45
2.3	Présentation des simulations numériques . . . . .	46
2.3.1	Hypothèses des simulations numériques . . . . .	46
2.3.2	Validation : comparaison avec les résultats expérimentaux . . . . .	47
2.3.3	Champs de vitesse et de pression . . . . .	49
2.4	Description en système dynamique . . . . .	50
2.4.1	Caractérisation du système dynamique par forçage . . . . .	50
2.4.1.1	Réponse à une excitation de faible amplitude . . . . .	51
2.4.1.2	Réponse à une excitation d'amplitude finie . . . . .	53
2.4.1.3	Influence du nombre de Reynolds . . . . .	54
2.4.1.4	Bilan : modélisation de la force hydrodynamique . . . . .	57
2.4.2	Prédictions du modèle dynamique pour les oscillations libres . . . . .	57
2.4.2.1	Nature de la bifurcation . . . . .	58
2.4.2.2	Influence de la densité du cylindre . . . . .	61
2.4.2.3	Influence de la gravité . . . . .	62
2.4.2.4	Influence du diamètre du cylindre . . . . .	63
2.5	Interprétation hydrodynamique du modèle dynamique . . . . .	64
2.5.1	Raideur . . . . .	64
2.5.2	Masse ajoutée . . . . .	66
2.5.3	Terme moteur . . . . .	66
2.6	Conclusion . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Mesure de la forme d'un fil</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Cas unidimensionnel . . . . .	79
3.2.1	Principe de la corrélation entre une image physique et une image virtuelle	79
3.2.2	Précision et robustesse du traitement d'image . . . . .	82
3.2.2.1	Influence du fond, du contraste et de la discrétisation du niveau de gris . . . . .	84
3.2.2.2	Influence de la largeur de l'image physique $R_f$ . . . . .	85
3.2.2.3	Influence du bruit . . . . .	85
3.2.2.4	Influence de la forme du profil de l'image physique . . . . .	86
3.2.3	Choix des paramètres de l'image virtuelle . . . . .	87

3.3	Extraction discrète de la forme du fil . . . . .	88
3.3.1	Principes de la méthode . . . . .	88
3.3.2	Détails de la méthode . . . . .	89
3.4	Extraction analytique de la forme . . . . .	90
3.4.1	Paramétrage du fil virtuel . . . . .	90
3.4.1.1	Description continue de la ligne moyenne . . . . .	91
3.4.1.2	Paramétrage discret de la ligne moyenne . . . . .	91
3.4.1.3	Image virtuelle discrétisée $G$ . . . . .	92
3.4.1.4	Bilan . . . . .	93
3.4.2	Initialisation du fil virtuel . . . . .	93
3.4.3	Stratégie d'optimisation . . . . .	93
3.4.3.1	Corrélation . . . . .	93
3.4.3.2	Dérivées partielles . . . . .	94
3.4.3.3	Terme de bord . . . . .	94
3.4.3.4	Algorithme de Newton . . . . .	95
3.4.3.5	Calcul de $M_{kp}$ et $L_k$ . . . . .	96
3.4.3.6	Mise à jour de la longueur du fil virtuel . . . . .	96
3.5	Validation de la méthode pour des images synthétiques . . . . .	97
3.5.1	Construction de l'image synthétique de référence . . . . .	97
3.5.2	Analyse de l'image synthétique . . . . .	98
3.5.2.1	Extractions discrète et analytique . . . . .	98
3.5.2.2	Résultats . . . . .	98
3.5.3	Influence du bruit et de la discrétisation du niveau de gris . . . . .	100
3.5.4	Comparaison avec la méthode de seuillage . . . . .	101
3.6	Validation de la méthode pour des images expérimentales . . . . .	101
3.6.1	Barre fléchissant sous son propre poids . . . . .	103
3.6.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	103
3.6.1.2	Comparaison du résultat la VIC et de l'image physique . . . . .	105
3.6.1.3	Comparaison des résultats de la VIC et de la théorie des poutres . . . . .	105
3.6.1.4	Choix de l'ordre $N$ . . . . .	107
3.6.2	Robustesse de la méthode . . . . .	108
3.6.2.1	Fil dans une fracture . . . . .	108
3.6.2.2	Panache thermique . . . . .	108
3.7	Conclusion . . . . .	109
<b>Conclusion</b>		<b>113</b>
<b>A Équations de base de la mécanique des fluides et de la mécanique des fils</b>		<b>121</b>
A.1	Équations du mouvement d'un fluide . . . . .	121
A.2	Équations de la statique des fils . . . . .	122
<b>B Méthode numérique</b>		<b>123</b>
B.1	Introduction . . . . .	123
B.2	Modèle . . . . .	123
B.2.1	Domaine fluide . . . . .	124
B.2.2	Cylindre . . . . .	124
B.3	Formulation variationnelle continue . . . . .	125
B.3.1	Domaine fluide : équations de Navier-Stokes . . . . .	125

---

B.3.2	Cylindre . . . . .	126
B.3.3	Formulation globale . . . . .	126
B.4	Discrétisation . . . . .	126
B.4.1	Déplacement du maillage et méthode Euler-Lagrange arbitraire (ALE)	126
B.4.1.1	Maillage . . . . .	127
B.4.1.2	Calcul du terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes	128
B.4.2	Discrétisation en temps . . . . .	130
B.4.3	Contrainte liée à la rigidité du cylindre . . . . .	130
B.4.4	Résolution des problèmes de point selle . . . . .	131
B.4.4.1	Contrainte d'incompressibilité . . . . .	131
B.4.4.2	Contrainte liée à l'immobilité du cylindre selon $x$ . . . . .	131
B.4.5	Oscillations forcées du cylindre . . . . .	132
B.4.6	Bilan : implantation sous FreeFem++ . . . . .	132
B.4.6.1	Formulation variationnelle . . . . .	132
B.4.6.2	Algorithme . . . . .	132
B.5	Calcul des forces . . . . .	134
B.6	Tests numériques . . . . .	134
B.6.1	Présentation des tests . . . . .	134
B.6.2	Influence du maillage . . . . .	134
B.6.3	Influence des autres paramètres . . . . .	135
B.6.4	Bilan . . . . .	135



*«Ce sujet», dit le gardien des dieux termes, «ou cette façon de le traiter, voilà sans doute qui peut séduire. Mais prends garde, ô éphèbe : ce n'est pas de l'histoire.»*  
Marc Bloch, Apologie pour l'histoire



# Introduction

Le transport hydrodynamique d'objets allongés comme les fibres, les filaments ou les flagelles, se rencontre dans un très grand nombre de situations, allant de l'industrie pétrolière au transport de micro-organismes. Dans tous les cas, ce type de transport met en jeu l'interaction entre un écoulement et un objet solide allongé, éventuellement flexible.

Dans la présente thèse, je me suis intéressé aux mécanismes élémentaires de ces interactions. L'objet allongé a été modélisé par un cylindre flexible ou rigide placé entre deux parois solides. Comme dans les milieux poreux ou fracturés ou dans les dispositifs microfluidiques, la distance entre ces deux parois est faible. Le diamètre de l'objet est comparable à la distance locale entre ces parois : il perturbe donc notablement l'écoulement dans son voisinage et peut même le bloquer partiellement. D'autre part, ce fort confinement empêche l'objet de se déplacer ou de se déformer beaucoup dans la direction normale aux parois. De plus, la position de l'objet dans l'ouverture est essentielle pour son transport : il ne subit une force de frottement avec la paroi que s'il est en contact avec celle-ci, et la force hydrodynamique de traînée qui tend à le tirer dépend de sa position dans l'ouverture.

Dans un premier temps, nous avons étudié la force de traînée sur un cylindre rigide, en fonction de sa position dans l'ouverture et de son orientation dans l'écoulement. Lorsque le cylindre est orienté perpendiculairement à la paroi, nous observons effectivement qu'il bloque l'écoulement et subit une force de traînée importante. Dans un second temps, nous avons cherché à déterminer la position d'équilibre du cylindre, et la stabilité de celle-ci. Même lorsque le nombre de Reynolds est faible, le cylindre tend à se placer à mi-distance entre les parois. Au-delà d'un nombre de Reynolds seuil d'environ 20, cette position devient instable et le cylindre se met à osciller. Cette oscillation est une explication possible du dépiégeage d'un fil bloqué dans une fracture, qui a été mis en évidence dans une étude antérieure (décrite dans la section suivante). À cause de la géométrie hétérogène de la fracture, le fil se déforme fortement. Pour caractériser ces déformations du fil à partir d'images expérimentales, nous avons développé une nouvelle méthode d'analyse basée sur la corrélation d'images. Cette méthode permet de mesurer les grandeurs qui caractérisent l'état mécanique de l'objet, comme sa courbure par exemple.

La thématique que nous avons abordée se rattache à de nombreux domaines d'applications, où des questions similaires apparaissent. Ainsi, en biologie, de nombreux micro-organismes utilisent le mouvement d'un flagelle pour se déplacer dans un fluide visqueux. La propulsion de ces micro-organismes a tout d'abord été étudiée en milieu infini [1, 2, 3], et a inspiré la conception de micro-robots [4, 5]. Cependant, dans de nombreuses situations, l'effet du confinement est important, en particulier pour les bactéries qui vivent dans le sol et dans les roches [6, 7], ou pour les micro-organismes qui se déplacent dans un organisme pluricellulaire, comme les parasites dans les vaisseaux sanguins [8]. La présence de parois modifie les forces hydrodynamiques créées par le mouvement du flagelle, et ralentit en général la vitesse des micro-organismes (à puissance consommée fixée) [9, 10]. De plus, le mouvement de ceux-ci n'est plus rectiligne comme en milieu infini, ils s'approchent des

parois à cause des forces hydrodynamiques qu'elles subissent [11]. À la différence des fibres que nous considérons, les micro-organismes se déplacent en général de manière active, dans un fluide au repos. Cependant, pour les applications à la filtration d'un fluide dans un milieu poreux, les bactéries qui peuvent contaminer l'eau sont soumises à un écoulement extérieur, ce qui les rapproche des fibres passives.

Les suspensions de fibres représentent un autre exemple très étudié où interviennent les interactions entre des fibres et un fluide. L'utilisation de suspensions de fibres courtes est en effet courante dans de nombreux secteurs comme l'industrie des composites, l'industrie pétrolière, et bien sûr l'industrie du papier [12]. L'injection de telles suspensions dans des fractures est utilisée dans l'industrie pétrolière pour colmater les fractures naturelles ou créées par le forage. Les fractures restées ouvertes agissent en effet comme des «court-circuits» pour les fluides utilisés pour la récupération du pétrole qui s'y engouffrent et sont perdus sans jouer leur rôle. En pratique, les fibres sont simplement ajoutées aux boues de forage, et dès qu'un écoulement est possible dans une fracture, des fibres y pénètrent et l'obstruent. Les mécanismes de ce colmatage des fractures sont encore mal compris [13]. Les fibres sont également ajoutées aux fluides utilisés dans l'industrie pétrolière lors des fracturations hydrauliques, afin d'éviter que la fracture ne se referme [14]. Dans les deux cas, les fibres peuvent être fortement confinées à l'endroit où elles bloquent la fracture, comme ce sera le cas dans notre étude, qui porte sur les situations où la fracture est très resserrée. En conclusion de ce mémoire, nous décrirons effectivement une configuration pour laquelle ce blocage a lieu.

D'autres applications mettent en jeu une fibre unique confinée. Pour remplacer un tissu retiré lors d'un acte chirurgical, il a été ainsi envisagé d'injecter un fil formant une pelote servant d'implant. Le fil est placé avec du fluide dans une seringue, et il est entraîné dans l'aiguille (droite ou courbe) par l'écoulement du fluide [15, 16]. Comme dans la configuration que nous étudions, le transport hydrodynamique du fil est fortement influencé par le confinement. Une autre application utilise l'injection de fibres optiques dans une fracture géologique. Les fibres optiques peuvent en effet être utilisées comme capteurs de température, par analyse de la lumière rétrodiffusée d'une impulsion laser. Cette méthode permet de déterminer avec une précision du centième de degré la température tout le long de la fibre optique, sur des distances supérieures au kilomètre [17, 18, 19]. Elle a déjà été utilisée pour mesurer la température dans des rivières, des lacs et des mines. L'injection d'une fibre optique dans une fracture géologique donnerait des renseignements précieux, par exemple pour localiser des sources.

Pour comprendre et dimensionner ces dispositifs d'intérêt industriel, des études antérieures ont déjà analysé l'interaction d'un objet allongé et d'un écoulement dans des configurations simplifiées. Par exemple, pour déterminer les mécanismes fondamentaux des instabilités qui rendent les suspensions de fibres inhomogènes, des suspensions de fibres de taille et d'élasticité identiques ont été utilisées, que ce soit expérimentalement [20, 21] ou numériquement [22, 23]. L'écoulement d'une suspension de fibres a été analysé dans des géométries simplifiées comme une constriction ou un élargissement [24, 25, 26]. Pour distinguer les effets collectifs liés à l'interaction entre les fibres des effets liés à l'interaction entre les fibres et l'écoulement, par exemple sur la rhéologie des suspensions, le cas idéalisé de la fibre unique a aussi été étudié. L'effet d'un écoulement de cisaillement sur la rotation d'une fibre rigide non confinée a ainsi fait l'objet des premiers travaux effectués sur les fibres en écoulement [27]. Si la fibre est flexible, elle peut flamber et même former une pelote, lorsqu'elle est placée dans un écoulement de cisaillement simple [28, 29] ou dans un écoulement élongationnel [30, 31]. Nous nous sommes également placés à l'échelle de la fibre unique mais, contrairement aux

études précédentes, celle-ci est confinée entre deux parois : elle ne peut pas tourner dans la direction du confinement. Pour les applications aux suspensions, cela signifie que l'étude modélise une échelle plus petite que l'échelle de Darcy, si la suspension est injectée dans un milieu poreux, et les zones où l'ouverture est faible, pour une injection dans une fracture.

## Travail antérieur sur le transport hydrodynamique de fibres en milieu confiné

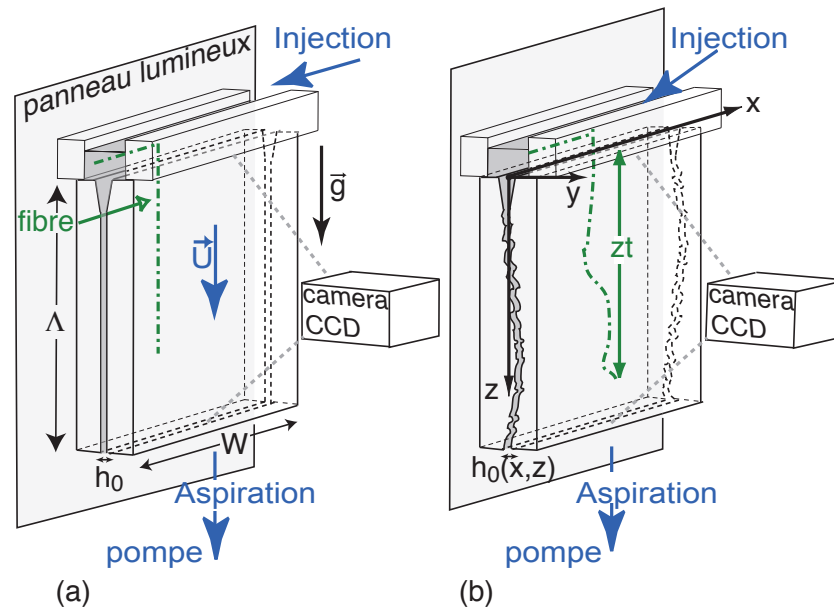


FIGURE 1 – Dispositif expérimental utilisé pour l'étude du transport de fibres en milieu fracturé. (a) : cas d'une fracture lisse. (b) : cas d'une fracture rugueuse. (Expériences M. V. d'Angelo)

Avant la présente thèse, des expériences ont été réalisées au laboratoire FAST sur un modèle de fracture rugueuse par M.V. d'Angelo, dans le cadre d'un séjour postdoctoral financé par la société Schlumberger Doll research. La question initiale était de savoir si un fil long peut être transporté par un écoulement dans une fracture, dans le but de mesurer son extension ou d'y injecter une fibre optique. La figure 1 montre le dispositif expérimental utilisé [32]. Deux types de cellules transparentes, afin de permettre la visualisation, ont été employées : une fracture lisse (cellule de Hele-Shaw) qui sert de référence et une fracture rugueuse, de même rugosité que les fractures naturelles [33, 34] ; L'ouverture moyenne  $h_0$  de ces cellules vaut 0,65 mm ou 1,1 mm. Un fil flexible en polyester, de diamètre  $D$  comparable à l'ouverture moyenne ( $D = 0,28$  mm), est introduit au début de la fracture. Le fil a soit une longueur faible devant les dimensions de la cellule ( $W \approx 100$  mm,  $\Lambda \approx 350$  mm), voir Fig. 1), soit une longueur supérieure à la longueur de la cellule (fils appelés fibres continues). Deux types de fluides ont été utilisés : de l'eau et une solution aqueuse de scléroglycane (polymère). Lorsque le fluide est mis en mouvement, le fil est entraîné par l'écoulement dans

la fracture. Le nombre de Reynolds  $Re$  de l'écoulement, est défini par :

$$Re = \frac{\rho_f U_m h_0}{\eta}, \quad (1)$$

où  $\rho_f$  est la densité du fluide,  $U_m$  la vitesse moyenne du fluide et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide. Ce nombre de Reynolds est compris entre 40 et 320 dans les expériences dont les résultats sont donnés ci-dessous.

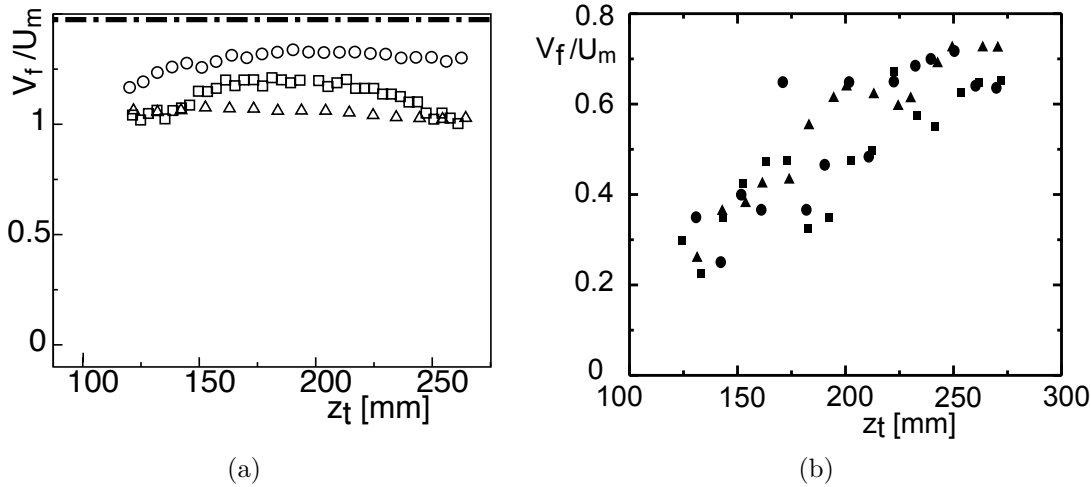


FIGURE 2 – Variation du rapport de la vitesse du fil  $V_f$  par la vitesse moyenne  $U_m$  du fluide (eau), dans la fracture lisse. (a) : fil court,  $L = 20$  mm. ( $\square$ ) :  $U_m = 100$  mm  $\cdot$  s $^{-1}$ , ( $\circ$ ) :  $U_m = 150$  mm  $\cdot$  s $^{-1}$ , ( $\triangle$ ) :  $U_m = 290$  mm  $\cdot$  s $^{-1}$ . Ligne pointillée : vitesse maximale du fluide ( $3U_m/2$ ). (b) : fil continu. ( $\blacksquare$ ) :  $U_m = 100$  mm  $\cdot$  s $^{-1}$ , ( $\bullet$ ) :  $U_m = 150$  mm  $\cdot$  s $^{-1}$ , ( $\blacktriangle$ ) :  $U_m = 290$  mm  $\cdot$  s $^{-1}$ . (Expériences M. V. d'Angelo).

Pour les fils courts, la vitesse du fil  $V_f$  est définie comme la vitesse du centre de masse, et pour les fils continus, comme la vitesse de l'extrémité. La figure 2 montre la variation du rapport de la vitesse du fil par la vitesse moyenne du fluide  $U_m$ , dans la fracture lisse (voir Fig. 1 a). Pour les fils courts, le rapport  $V_f/U_m$  est relativement constant, et dépend peu du débit (les variations de la figure 2a sont dus à la dispersion des résultats expérimentaux). La vitesse du fil est bien sûr inférieure à la vitesse maximale du fluide, mais elle en est proche. Pour les fils continus, la vitesse du fil augmente lorsque le fil avance dans la fracture, puisque seule la fraction de fil qui se trouve dans la fracture est tirée par le fluide. Comme pour les fils courts, le rapport  $V_f/U_m$  est indépendant de la vitesse du fluide.

Dans la fracture rugueuse, la vitesse fluctue beaucoup plus avec la position du fil (voir Fig. 3 ) et la vitesse moyenne dépend de la vitesse du fluide. Les fluctuations de vitesses sont plus importantes avec l'eau qu'avec la solution de scléroglycane. Pour les vitesses les plus faibles, la vitesse du fluide s'annule en certains points (voir Fig. 3a ) : l'extrémité du fil est piégée. La figure 4 montre que lors du piégeage, le fil se déforme beaucoup : il flambe et peut même former des boucles, ce qui le bloque définitivement. Les événements de piégeage sont cruciaux pour le transport de fil : ils modifient notablement la vitesse moyenne du fil, et peuvent être responsables d'un arrêt définitif du transport.

Les expériences de M.V. d'Angelo mettent en jeu un écoulement de fluide, la déformation d'un fil, et, au moins pour les fractures rugueuses, le frottement entre le fil et la paroi.

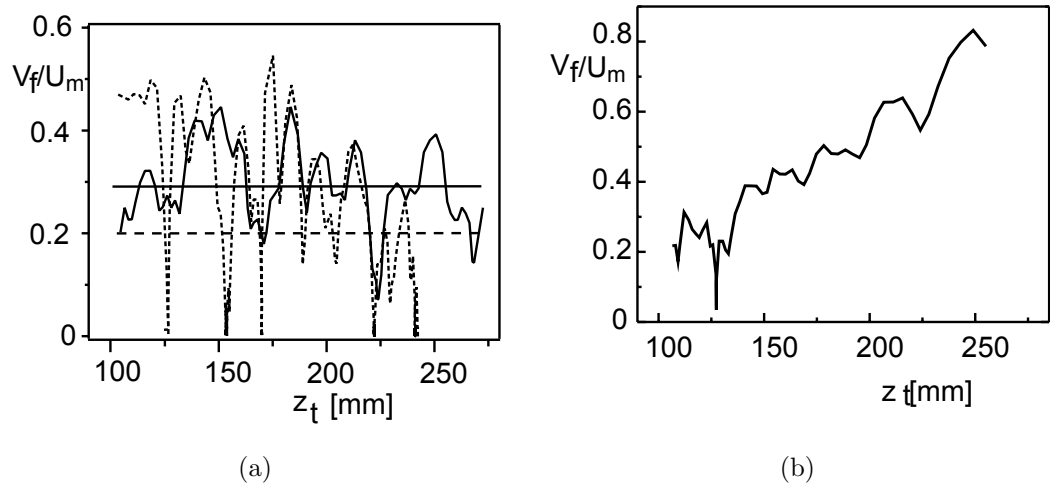


FIGURE 3 – Variation du rapport de la vitesse du fil par la vitesse moyenne du fluide, dans la fracture rugueuse, pour un fil continu. (a) : le fluide utilisé est l'eau. Ligne pointillée (respectivement continue) :  $U_m = 160 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  (resp.  $U_m = 210 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Les droites horizontales donnent les valeurs moyennes des courbes précédentes. (b) : le fluide utilisé est une solution de scléroglycane,  $U_m = 220 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . (Expériences M. V. d'Angelo).

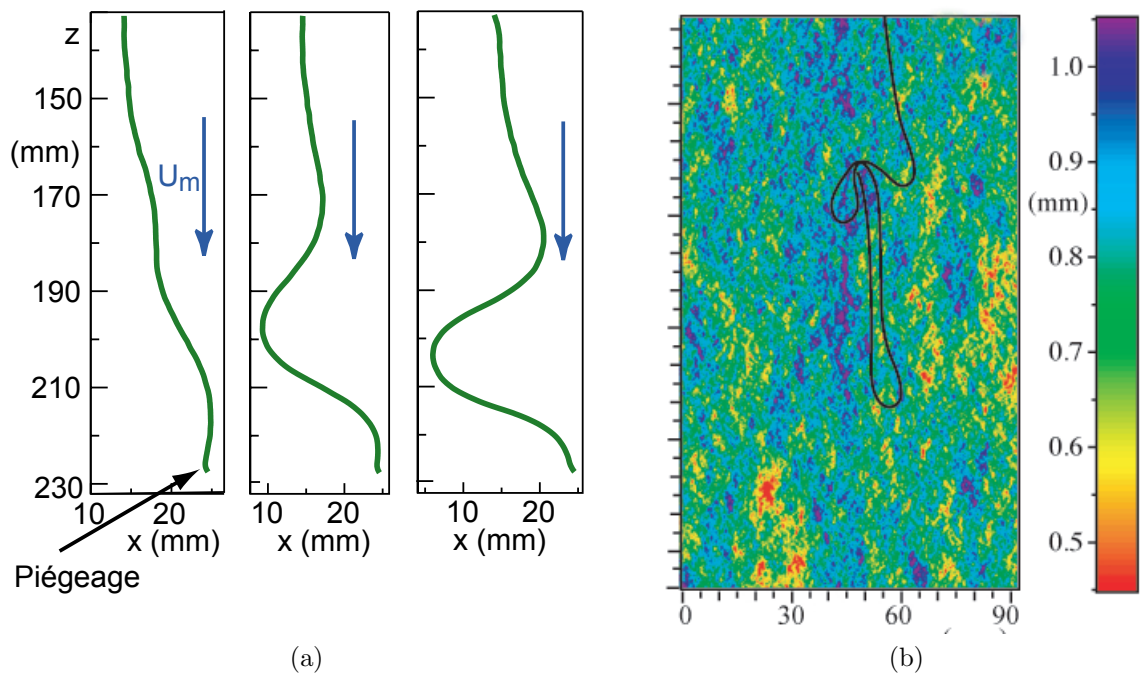


FIGURE 4 – Événements de piégeage du fil, dans la fracture rugueuse. (a) : séquence de vues du flambage du fil lorsque son extrémité est piégée. Le temps entre deux images vaut  $0,166 \text{ s}$ . Fluide : eau,  $U_m = 160 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . (b) : exemple de formation de boucles lorsque l'extrémité du fil est piégée. Le code couleur indique l'ouverture locale. Fluide : solution de scléroglycane,  $U_m = 242 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . (Expériences M. V. d'Angelo).

L'interprétation de ces expériences n'est pas facile. Le champ de vitesse dans les fractures rugueuses est en effet complexe, à cause de la géométrie, du caractère inertiel de l'écoulement, et, pour la solution de scléroglycane, à cause du caractère non-newtonien du fluide. Le fil se déplace et se déforme fortement. Expérimentalement, seule la position dans le plan  $(x, z)$  est mesurable, la position dans l'ouverture ne peut pas être obtenue pour la fracture rugueuse. Comme du fluide peut être présent entre le fil et la paroi, le frottement n'est pas trivial à modéliser : rien n'assure en effet qu'il s'agisse d'un simple frottement de Coulomb.

Un des buts de la présente thèse est de comprendre et d'interpréter les résultats précédents, notamment les conditions de piégeage. L'effet des caractéristiques de l'écoulement (nombre de Reynolds, géométrie) sera particulièrement étudié.

## Démarche suivie

Une première question importante est la valeur de la force hydrodynamique motrice qui tire le fil dans la direction de l'écoulement (force de traînée). Cette force dépend de l'écoulement du fluide, et de la vitesse du fil. Nous avons choisi d'étudier de manière approfondie, dans le cas le plus simple possible, la force sur chaque élément du fil, La fracture choisie est lisse (cellule de Hele-Shaw). Nous mesurons la force sur un cylindre rigide qui modélise un élément du fil, et permet de simplifier l'étude. Le cylindre est immobile, ce qui correspond aux situations de piégeage, pendant lesquelles la vitesse du fil est nettement inférieure à celle du fluide. Pour simplifier au maximum l'écoulement du fluide, nous choisissons un fluide newtonien, suffisamment visqueux pour que le nombre de Reynolds soit faible : dans ce cas, le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes (voir annexe A) est négligeable, ce qui simplifie l'expression de la force s'exerçant sur le fil. Celle-ci est alors proportionnelle à la viscosité et à la vitesse du fluide. Le coefficient de proportionnalité dépend uniquement de la géométrie, et sera déterminé en fonction du confinement, de l'ouverture et de l'orientation du cylindre par rapport à l'écoulement. Cette étude de la force de traînée sur un cylindre confiné est présentée au chapitre 1.

La position du fil dans l'ouverture est un élément clé du problème : elle conditionne en particulier la valeur de la force de traînée, et le frottement avec la paroi n'apparaît que si le fil touche celle-ci. Dans le chapitre 2 nous étudions les effets contrôlant cette position, dans le cas particulier d'un cylindre perpendiculaire à l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw, et libre uniquement de se déplacer dans la direction normale à l'écoulement. Nous montrerons tout d'abord qu'aux faibles nombres de Reynolds le cylindre se place à mi-distance des parois. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, nous verrons que le cylindre peut osciller spontanément, dans la direction normale aux plaques, à cause des forces de portance. Nous analyserons en détail ce phénomène, dont nous montrerons l'originalité par rapport aux autres instabilités d'un cylindre dans un écoulement, et en particulier que l'instabilité observée n'est pas due à l'émission de tourbillons de Bénard-Von Kármán mais à un couplage fort entre l'écoulement et le cylindre.

Contrairement aux deux premiers chapitres, le chapitre 3 ne concerne pas l'aspect hydrodynamique du problème mais présente une méthode de traitement d'images destinée à déterminer la forme du fil. En effet, pour tester une modélisation des forces qui s'exercent sur le fil, et en particulier les forces de frottement, il faut déterminer la position, l'angle du vecteur tangent et la courbure du fil en tout point. L'angle du fil détermine par exemple la traînée qu'il subit, comme nous l'étudions au chapitre 1. Il est aussi nécessaire de mesurer la courbure du fil parce qu'elle est reliée au moment fléchissant du fil (voir annexe A). La



mesure de la courbure n'est pas aisée, car il s'agit essentiellement de déterminer une dérivée seconde (de la position) à partir d'un signal (image) discret et bruité. Nous avons développé une méthode qui permet d'obtenir ces grandeurs, sous forme d'une série de termes analytiques, à partir d'images expérimentales. Cette méthode est basée sur la corrélation entre l'image physique et l'image d'un fil virtuel. Elle a été validée avec des images bruitées où le diamètre du fil n'est que de quelques pixels (voir Fig. 4b ).

Pour finir, nous utiliserons la méthode de traitement d'images et les résultats obtenus sur les forces hydrodynamiques pour interpréter des expériences préliminaires de transport et de piégeage de fil dans un canal en forme de spirale.



# Chapitre 1

## Traînée en régime de Stokes sur un cylindre confiné

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier expérimentalement et numériquement la force de traînée sur un cylindre confiné immobile, dans le cas le plus simple des écoulement de Stokes. Cependant, les effets liés à l'inertie du fluide qui apparaissent à des nombres de Reynolds faibles mais non nuls seront aussi discutés. Nous cherchons particulièrement à déterminer l'influence du confinement et celui de la position du cylindre dans l'ouverture, et nous comparons le cas de cylindres placés parallèlement et perpendiculairement à l'écoulement moyen.

L'écoulement est localisé dans une cellule de Hele-Shaw de section  $h_0 \times W$ , où l'ouverture  $h_0$  vérifie  $h_0 \ll W$ . La longueur  $L$  du cylindre est nettement plus grande que son diamètre  $D$  (il s'agit donc bien d'un objet allongé), et elle est du même ordre de grandeur que la largeur  $W$  de la cellule. Le confinement dû aux deux plaques les plus proches de la cellule est caractérisé par le rapport  $\beta = D/h_0$ . Le cas des très forts confinements  $\beta \approx 1$  est particulièrement étudié. L'effet du confinement latéral (caractérisé par  $L/W$ ) est lui aussi analysé, surtout dans le cas des cylindres perpendiculaires à l'écoulement.

En régime de Stokes, la force de traînée est proportionnelle à la viscosité dynamique du fluide  $\eta$  et à la vitesse  $U_m$  loin du cylindre [35], que le cylindre soit confiné ou non. Les coefficients de proportionnalité  $\lambda_{\parallel} = F_{\parallel}/(\eta L U_m)$  et  $\lambda_{\perp} = F_{\perp}/(\eta L U_m)$  sont alors purement géométriques ( $F_{\parallel}$  est la force qui s'exerce sur un cylindre parallèle à l'écoulement,  $F_{\perp}$  celle sur un cylindre perpendiculaire à l'écoulement). Le but de ce chapitre est de déterminer ces coefficients en fonction de la géométrie.

Dans le cas d'un cylindre non confiné,  $\lambda_{\perp} \approx 2\lambda_{\parallel}$  et ces coefficients sont d'ordre  $\epsilon = 1/\ln(D/L)$  [36, 37, 38]. Les coefficients  $\lambda$  dépendent de la longueur du cylindre : pour un cylindre infini en régime de Stokes, il n'est pas possible de définir une force par unité de longueur, ce qui est connu sous le nom de paradoxe de Stokes [39]. Pour des écoulements faiblement confinés, la présence des parois provoque l'augmentation de la force de traînée. La configuration dans laquelle un cylindre court sédimente à mi-distance entre deux plaques parallèles séparées par une grande distance  $h_0$  ( $D \ll L \ll h_0 < W$ ) a été étudiée expérimentalement par de Mestre [40]. Dans ce cas, les coefficients géométriques valent  $\lambda = \alpha_1(\epsilon + (\alpha_2 \frac{L}{h_0} + \alpha_3)\epsilon^2)$ , où les coefficients  $\alpha_i$  sont des constantes qui dépendent de l'orientation du cylindre (vertical soit horizontal). Cette configuration a aussi été étudiée théoriquement dans la limite des cylindres de longueur grande devant l'ouverture ( $h_0 \ll L \ll W$ ). Dans ce cas, l'influence des parois est dominante,  $\lambda$  ne dépend que du rapport  $\beta = D/h_0$

(et pas de la longueur du cylindre  $L$ ), et il est d'ordre  $1/\ln(\beta)$  pour  $\beta \ll 1$  [41, 42, 43].

Ces prédictions théoriques ont été vérifiées et étendues pour les valeurs élevées de  $\beta$  dans le cas de cylindres en mouvement perpendiculaire à leur axe, par des simulations numériques 2D [44] et par des expériences [45, 46, 47, 48]. La configuration où le cylindre est fixé a aussi été étudiée, à faibles [49, 50, 51] et grands [52, 53, 54] nombres de Reynolds, ainsi que pour des fluides non-newtoniens [55, 56]. Les résultats expérimentaux sont rares dans cette géométrie, qui est la plus proche de celle qui nous intéresse : Dhahir [57] a mesuré les forces sur un cylindre de faible facteur de forme ( $D \sim L$ ) pour des fluides de rhéologies différentes, et Rehimy [58] a utilisé la même configuration que nous, mais sans effectuer de mesure de force.

Dans les expériences et simulations que nous avons réalisées, les forces sont mesurées sur un cylindre immobile confiné dans une cellule de Hele-Shaw. Nous étudions particulièrement la variation de la force avec le confinement  $\beta = D/h_0$  et  $L/W$ , et l'effet de l'orientation du cylindre. Dans le cas d'un cylindre perpendiculaire à l'écoulement, sauf si  $L \approx W$ , le fluide peut éviter le cylindre, ce qui induit des effets 3D qui n'avaient pas encore été discutés. Le cas où le cylindre est parallèle à l'écoulement, pourtant plus simple, n'a pas été étudié à notre connaissance. Par contre, un problème proche a déjà été traité : il s'agit du cas d'un cylindre situé à l'intérieur d'un tube, qui a été étudié théoriquement dans le régime de Stokes [39] et expérimentalement dans le régime inertiel [16].

Nous présentons d'abord en section 1.2 le dispositif expérimental qui nous a permis de mesurer la force de traînée, puis les simulations numériques correspondantes en section 1.3. Ensuite, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus pour  $\lambda_{\parallel}$  en section 1.4 pour une large gamme de confinements ( $0,04 \leq \beta = D/h_0 \leq 0,83$ ), et les variations en fonction de la position dans l'ouverture. Ces résultats expérimentaux sont comparés et complétés par des simulations numériques, qui permettent notamment de calculer séparément les composantes de la force due à la pression et à la friction visqueuse. Les résultats pour  $\lambda_{\perp}$  sont présentés dans la section 1.5, et sont comparés avec les résultats pour  $\lambda_{\parallel}$ . L'effet du confinement  $\beta = D/h_0$  et de la position du cylindre sont discutés, ainsi que l'apparition d'effets 3D lorsque la longueur  $L$  du cylindre n'est pas très proche de la largeur de la cellule  $W$ .

## 1.2 Dispositif expérimental

### 1.2.1 Présentation générale

#### 1.2.1.1 Cellule

Pour étudier les forces hydrodynamiques sur les fils en géométrie confinée, nous utilisons le dispositif le plus simple : une cellule de Hele-Shaw, c'est-à-dire deux plaques parallèles (voir Fig. 1.1). La cellule a une ouverture constante  $h_0 = 0,75$  mm ou  $h_0 = 4,9$  mm, excepté dans les premiers 60 mm, où elle augmente de  $h_0 = 0,75$  mm (respectivement  $h_0 = 4,9$  mm) à  $h_0 = 5$  mm (respectivement  $h_0 = 10$  mm). Cette forme a été choisie pour faciliter l'insertion de fils flexibles dans la cellule (voir l'introduction); dans le cas présent, cette géométrie complique légèrement l'interprétation des résultats.

La première cellule utilisée avait une ouverture  $h_0 = 0,75$  mm et un petit obstacle cylindrique était placé en son centre : les cylindres devaient être placés loin du cylindre qui perturbait l'écoulement. D'autre part, cette cellule avait l'inconvénient de ne pas permettre une visualisation de la position du fil dans l'ouverture, qui est un des paramètres dont dépend la force. Enfin, il n'est pas facile de trouver des fils de diamètres différents et bien

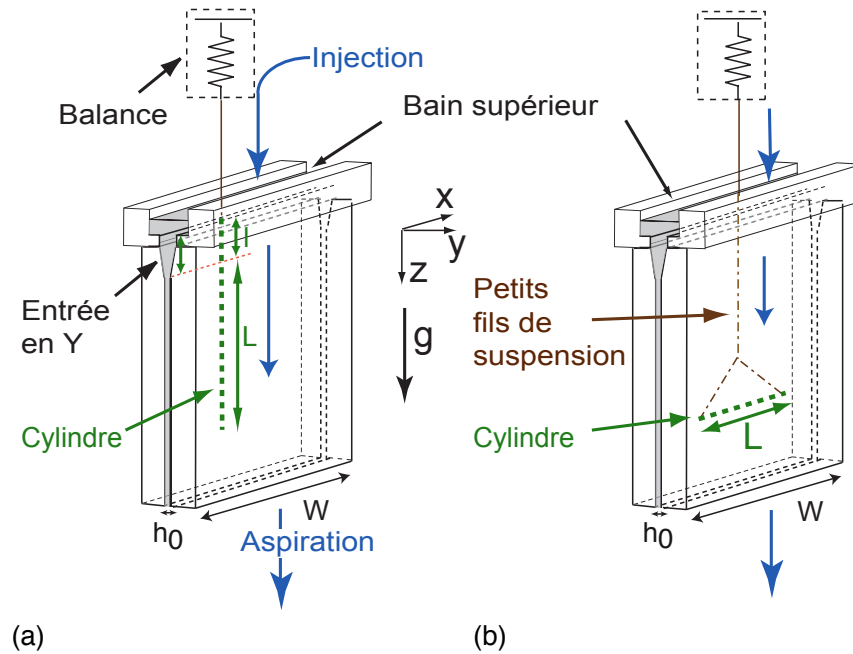


FIGURE 1.1 – Dispositif utilisé pour mesurer les forces hydrodynamiques. (a) : cas d'un cylindre parallèle à l'écoulement. (b) : cas d'un cylindre perpendiculaire à l'écoulement.

définis inférieurs à  $h_0 = 0,75$  mm. C'est pourquoi nous avons fait usiner une deuxième cellule d'ouverture  $h_0 = 4,9$  mm afin de pouvoir changer plus facilement le diamètre du fil et explorer une plus large gamme de valeur de  $\beta$ . Cette cellule permet également une visualisation de la position du fil dans l'ouverture.

La valeur de l'ouverture de la cellule est un paramètre crucial pour la valeur des forces mesurées, notamment dans le cas des cylindres perpendiculaires à l'écoulement. Cette valeur a été vérifiée en faisant monter un fluide coloré (eau et éosine) dans la cellule grâce à un pousse-seringue (dont le débit a été contrôlé en mesurant la masse injectée au cours du temps à l'aide d'une balance). La vitesse de l'avancée du front donne la valeur moyenne de l'ouverture à une hauteur donnée, qui vaut  $h_0 = 4,9 \pm 0,1$  mm. En bas de la cellule, il est possible de mesurer cette épaisseur à l'aide de cales : les valeurs trouvées sont compatibles avec les valeurs trouvées à l'aide de l'autre méthode.

### 1.2.1.2 Capteur de force

Les forces sur les cylindres sont mesurées par une balance de chimie Sartorius CP 225 interfacée sous Labview. Cette balance a l'avantage de mesurer les forces sur une large gamme [ $10^{-7} - 8 \times 10^{-1}$  N] (soit un affichage [ $10^{-5} - 80$  g]). De plus, l'étalonnage se fait automatiquement grâce à une masse interne à la balance. L'inconvénient de la balance est de présenter une dérive en temps (de l'ordre de quelques  $10^{-4}$  g/h), qui est corrélée sur les temps longs à la variation de température dans la pièce.

Cette balance possède un crochet sur sa face inférieure, ce qui permet d'y relier les cylindres, au moyen de petits fils de suspension (fils de nylon de diamètre 100  $\mu\text{m}$  ou fils de couture en polyester de diamètre 220  $\mu\text{m}$ ). Dans le cas où le cylindre est parallèle à l'écoulement (voir Fig. 1.1 (a)), le cylindre peut ou non être complètement immergé, ce qui

n'influence pas sur la mesure (voir section 1.4.4), parce que les fils de suspension s'arrêtent dans le bain supérieur. Dans le cas où le cylindre est perpendiculaire à l'écoulement (voir Fig. 1.1 (b)), une partie des petits fils de suspension se trouve dans la cellule, ce qui rajoute une contribution à la force mesurée. Pour que cette contribution reste faible, il faut que le diamètre du cylindre soit nettement plus grand que le diamètre des fils d'accroche (c'est pourquoi nous choisissons dans ce cas les fils de diamètre 100  $\mu\text{m}$ ).

La balance est fixée sur un plateau qui peut être déplacé selon les axes  $x$  et  $y$  grâce à des vis micrométriques de marque Micro-control dont la résolution du déplacement vaut 10  $\mu\text{m}$ .

## 1.2.2 Caractéristiques de l'écoulement

### 1.2.2.1 Pompe

Un écoulement est établi dans la cellule à l'aide d'une pompe à engrenage constitué d'une tête Micropump et d'un corps de pompe Ismatec MCP-Z. Cette pompe est placée plus bas que la cellule, afin d'éviter d'éventuels désamorçages. Elle est interfacée sous Labview. La consigne consiste en un nombre de tours par seconde, qui peut varier de 1 à 100 par pas de 1. Le fluide est aspiré en bas de la cellule et réinjecté dans le bain supérieur, à travers un tissu poreux qui s'étend sur toute la largeur  $W$  afin de bien répartir l'injection du fluide. Le débit de la pompe a été mesuré en déconnectant le tuyau d'injection du dispositif, et en faisant couler le fluide (mélange eau-glycérol) dans un bécher placé sur une balance interfacée (Sartorius LC 6201 S) située à la même hauteur que le bain supérieur (afin d'éviter les écoulements dus à la gravité, la pompe ne bloquant pas complètement le fluide). Il est important qu'il n'y ait pas d'écoulement lorsque la pompe est arrêtée pour que l'étalonnage corresponde au cas de l'utilisation en circuit fermé. Le débit de la pompe varie linéairement avec la valeur de la consigne, et le débit maximal vaut  $Q_{max} = 1660 \text{ mL/min} = 2,77 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ .

Lors des mesures de forces, le débit de la pompe est augmenté puis abaissé par paliers, et ceci 3 fois de suite afin de vérifier qu'aucune dérive ou hystérésis n'est observée.

### 1.2.2.2 Fluides

Deux types de fluides newtoniens ont été utilisés : de l'eau purifiée, et des mélanges eau-glycérol de concentration en masse en glycérol de 50% à 80%. La masse volumique  $\rho_f$  du mélange ainsi que la température  $T$  sont mesurées avant les expériences à l'aide d'un densimètre Anton Paar 35N. Ces mesures ont l'avantage d'être rapides (quelques secondes) et faciles. La valeur de la viscosité de l'eau est déterminée à partir de la mesure de température par interpolation de tables [59]. En utilisant la valeur de la température et de la masse volumique et des tables [60, 61], nous déterminons la viscosité dynamique  $\eta$  des mélanges eau-glycérol ; les valeurs correspondant aux expériences se trouvent dans les tables 1.1 et 1.2. L'erreur sur cette valeur est estimée à 3% en effectuant des mesures directes de viscosité à l'aide d'un rhéomètre Anton Paar MCR 501.

Des fluides non-newtoniens ont également été utilisés, notamment des solutions de scléroglycane (polysaccharide semi-rigide) dans l'eau à 500 ppm en masse. Ils s'agit de fluides rhéofluidifiants, c'est-à-dire que leur viscosité diminue avec le taux de cisaillement (figure 1.2). La caractéristique rhéologique de ces fluides présente un plateau newtonien à bas taux de cisaillement, puis la viscosité décroît en loi de puissance et atteint ensuite un second plateau. Ce second plateau n'est pas atteint avec les rhéomètres disponibles au laboratoire.

Ces variations de la viscosité en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  a été mesurée grâce à un rhéomètre Anton Paar MCR 501 ou un viscosimètre Contraves low shear 30. Nous avons ajusté les courbes expérimentales par une loi empirique qui relie de manière lisse deux plateaux newtoniens par une loi de puissance (légende de la figure 1.2). Le but de cet ajustement est uniquement d'obtenir la caractéristique rhéologique sous une forme utilisable dans une simulation numérique, pas de suggérer une interprétation microscopique de la rhéologie du fluide.

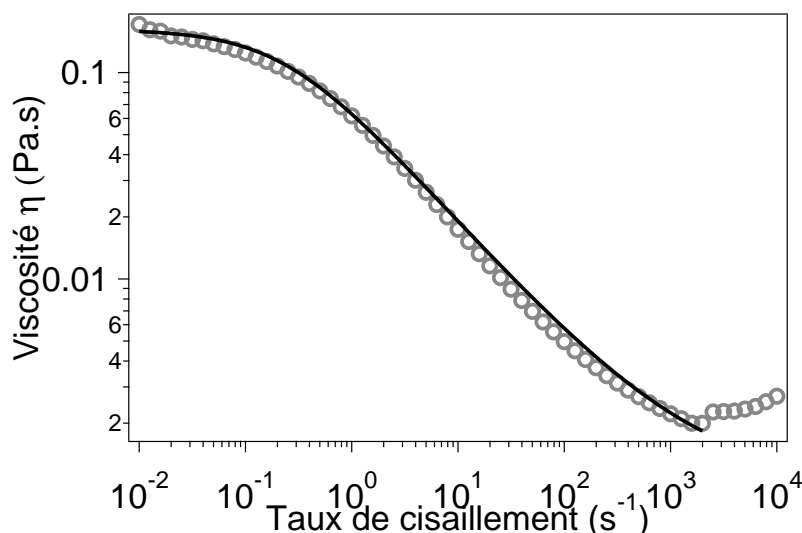


FIGURE 1.2 – Viscosité d'une solution aqueuse de scléroglycane à environ 500ppm en fonction du taux de cisaillement. Cette mesure est effectuée grâce à un rhéomètre Anton Paar 501 MCR à  $T = 23$  °C, en diminuant progressivement le taux de cisaillement. La durée de chaque mesure vaut 120 s. Cercles gris : points expérimentaux, ligne noire : ajustement par une loi  $\eta = (\eta_0 - \eta_\infty) / (1 + \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0)^{1-n} + \eta_\infty$ , avec  $\eta_0 = 0,161$  Pa · s,  $\eta_\infty = 0,001$  Pa · s,  $\dot{\gamma}_0 = 0,242$  s<sup>-1</sup> et  $n = 0,416$ .

### 1.2.3 Cylindres utilisés

Dans le cas de la mesure de forces sur un cylindre d'axe parallèle à l'écoulement, nous avons utilisé de nombreux types de cylindres (voir Tab. 1.1). Certains de ces cylindres sont des tiges rigides (PMMA, fer), d'autres comme les cylindres en verre sont des tubes. Des fils souples de soie et de polyester ont également été utilisés ; ce sont des fils de couture multibrins (et donc de diamètre irrégulier), qui sont étirés avant usage de manière à les rendre droits. Nous verrons (voir section 1.4.4) que, pour nos expériences de mesure de forces, la rugosité du fil ainsi que le caractère creux ou plein du cylindre ne joue pas, seul le diamètre moyen (indiqué table 1.1) compte. Dans le cas de la mesure des forces sur un cylindre perpendiculaire à l'écoulement, les fils souples se déformeraient à cause de l'écoulement, ce qui compliquerait l'interprétation des mesures : seuls des cylindres rigides sont utilisés dans ce cas (voir Tab. 1.2).

TABLE 1.1 – Paramètres expérimentaux correspondant à la mesure de  $\lambda_{\parallel}$ .  $D$  : diamètre du cylindre (mesurée grâce à une loupe binoculaire),  $L$  : longueur du cylindre;  $h_0$  : ouverture de la cellule dans la zone d'ouverture constante;  $\beta = D/h_0$ ;  $\eta$  : viscosité dynamique du fluide. Les symboles caractérisant les différentes expériences sont les mêmes que pour les mesures expérimentales de  $\lambda_{\parallel}$ . Pour les expériences correspondant à  $(\square)$ ,  $(\oplus)$  et  $(\boxtimes)$ ,  $L$  est la différence entre les longueurs de deux cylindres.

	$D(\text{mm})$	$h_0(\text{mm})$	$\beta$	$L(\text{mm})$	$\eta(\text{mPa} \cdot \text{s})$	Symboles
verre	1,5	4,9	0,31	89	40,0	$\square$
PMMA	3,2	4,9	0,65	110	22,4	$\oplus$
PMMA	4,05	4,9	0,83	100	21,7	$\boxtimes$
fibre optique	0,14	4,9	0,029	195	35,0	$\triangleleft$
polyester	0,20	4,9	0,041	177	17,5	$\diamond$
polyester	0,20	4,9	0,041	177	7,34	$\nabla$
soie	0,45	4,9	0,092	153	37,2	$\triangleright$
verre	1,5	4,9	0,31	151	6,5	$\triangle$
verre	1,5	4,9	0,31	138	40,0	$\circ$
fer	2,0	4,9	0,41	177	32,0	$\boxtimes$
fer	4,0	4,9	0,82	184	37,6	$\odot$
PMMA	4,05	4,9	0,83	179	21,7	$\otimes$
polyester	0,18	0,75	0,24	135	119	$\blacktriangledown$
soie	0,45	0,75	0,6	82	24,0	$\blacktriangleright$

TABLE 1.2 – Valeurs des paramètres correspondant aux mesures de  $\lambda_{\perp}$ . Toutes ces mesures ont été réalisées avec une cellule d'ouverture  $h_0 = 4,9$  mm et de largeur  $W = 90$  mm;  $Re < 5$ . La position correspond à la position dans l'ouverture, en  $y$ .

	$D(\text{mm})$	$\beta$	Gamme de $L(\text{mm})$	Symboles	Position
acier	0,98	0,20	85	$\blacktriangledown$	centre
verre	1,5	0,31	37,5 – 88	$\blacktriangle$	centre
laiton	2,96	0,60	86,5	$\blacksquare$	centre
PMMA	3,2	0,65	44,7 – 88	$\blacklozenge$	centre
PMMA	4,05	0,83	67,5 – 88,7	$\bullet$	centre
verre	1,5	0,31	37,5 – 84	$\triangle$	paroi
laiton	2,96	0,60	86,5	$\square$	paroi
verre	4,15	0,85	25,4 – 88,8	$\circ$	paroi
verre	4,15	0,85	57,6	$+$	paroi



## 1.3 Principes des simulations numériques

Afin d'obtenir des résultats sur une gamme de paramètre plus étendue que celle qui est accessible expérimentalement, nous avons réalisé des simulations dont le principe est détaillé dans cette section. Nous calculons la force qui s'exerce sur le cylindre en régime de Stokes ( $Re = 0$ ), alors que le nombre de Reynolds lors des expérience est d'ordre 1 ( $Re \sim 1$ ). La comparaison des résultats numériques et expérimentaux validera cette approximation (voir sections 1.4 et 1.5).

Pour déterminer numériquement  $\lambda_{\parallel}$  et  $\lambda_{\perp}$  dans le cas d'un fluide newtonien, il faut résoudre l'équation de Stokes (Éq. (A.5)) et l'équation d'incompressibilité, avec les conditions aux limites appropriées. La contrainte de friction visqueuse ainsi que la pression à la surface du cylindre peuvent alors être calculées afin de déterminer la force hydrodynamique. Notons que dans cette approche, nous calculons directement les coefficients  $\lambda$  et que nous faisons l'hypothèse de la proportionnalité entre la force et la viscosité, et entre la force et la vitesse du fluide. Pour les écoulements parallèles au cylindre, les simulations 2D donnent des résultats pertinents, car l'invariance par translation selon l'axe  $z$  représente une bonne approximation. Si l'écoulement est perpendiculaire au cylindre, les simulations 2D ne sont pas valables dans la plupart des cas et des simulations 3D sont alors nécessaires. La figure 1.3 présente la géométrie utilisée pour les simulations 2D : le gradient de pression est appliqué dans la direction  $z$ , qui est parallèle à l'axe du cylindre pour  $\lambda_{\parallel}$  (voir Fig. 1.3 (a)) et perpendiculaire à l'axe cet pour  $\lambda_{\perp}$  (voir Fig. 1.3 (b))

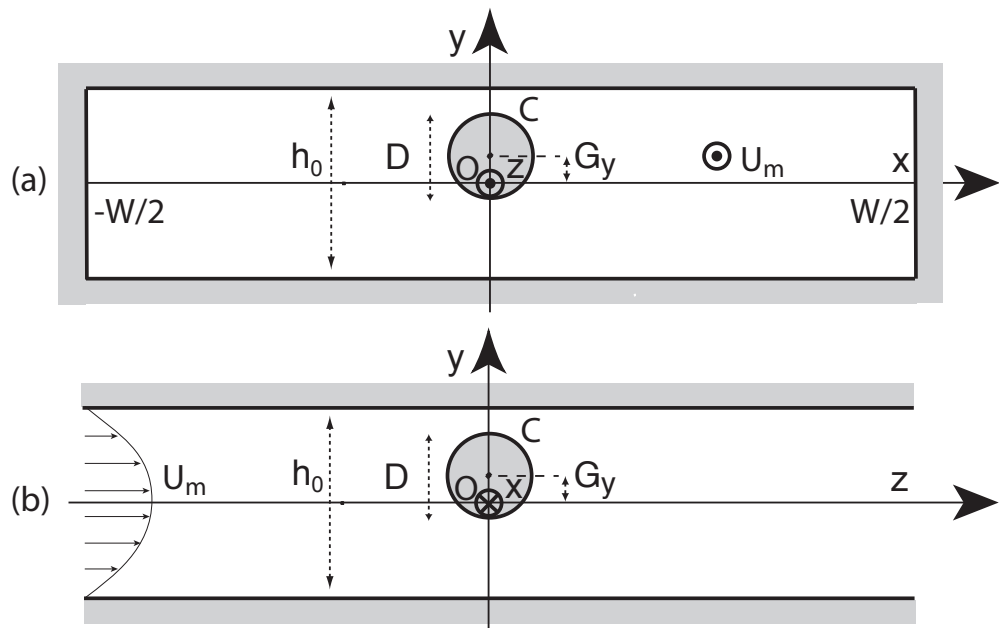


FIGURE 1.3 – Géométrie utilisée pour le calcul 2D. (a) : cas d'un cylindre parallèle à l'écoulement. (b) : cas perpendiculaire.

### 1.3.1 Calcul de $\lambda_{\parallel}$

Nous présentons dans cette section la méthode utilisée pour calculer  $\lambda_{\parallel}$  dans le cas d'un fluide newtonien, qui est le cas que nous avons le plus étudié, ainsi qu'un calcul modélisant l'écoulement du scléroglycane.

### 1.3.1.1 Cas d'un fluide newtonien

Dans le cas où le cylindre est parallèle à l'écoulement, la géométrie est approximativement invariante selon  $z$ . Entre deux plaques parallèles (sans cylindre), il est connu [62] que l'écoulement devient invariant par translation au-delà d'une certaine distance du début des plaques. Cette distance, appelée longueur d'entrée vaut environ  $h_0 Re/10$ . Dans les expériences présentées dans ce chapitre, le nombre de Reynolds  $Re$  reste suffisamment faible ( $Re < 20$ , sauf pour les expériences avec l'eau) pour que la longueur d'entrée soit faible devant la longueur totale du cylindre. Le nombre de Reynolds à partir duquel l'écoulement devient turbulent est bien sûr très supérieur (900, d'après [63]) à ceux des expériences présentées.

Dans la suite des raisonnements, nous considérons que cette invariance est exactement vérifiée pour en déduire la forme des champs de vitesse et de pression. L'écoulement correspondant à des conditions aux limites données est unique en régime de Stokes [35]. L'écoulement a donc les mêmes symétries que les conditions aux limites, et la vitesse s'écrit :

$$\mathbf{V} = V(x, y)\mathbf{e}_z. \quad (1.1)$$

L'équation d'incompressibilité est alors vérifiée quelle que soit la fonction  $V(x, y)$ . L'équation de Stokes<sup>1</sup> (voir Éq. (A.5)) donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta\Delta V(x, y). \quad (1.4)$$

Les équations (1.2) et (1.3) signifient que la pression  $p$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ . À cause de l'invariance par translation dans la direction  $z$ ,  $\partial p/\partial z$  est constant. L'équation de Stokes se réduit alors à une équation de Laplace 2D (voir Éq. (1.4)), qui est résolue numériquement à l'aide du programme Freefem++ [64]. Nous choisissons un maillage d'au moins 12000 nœuds (écart à la valeur obtenue en continuant de raffiner le maillage estimée à 2%), et nous avons adimensionné l'équation en choisissant un gradient de pression  $\tilde{G} = 1$  et une viscosité  $\tilde{\eta} = 1^2$ . La force hydrodynamique par unité de longueur,  $f$ , est la somme de la force de friction évaluée numériquement et de la force de pression connue analytiquement ( $\pi/4\beta^2\tilde{G}$ , avec  $\beta = D/h_0$ ). Cette composante de pression est due à la différence de pression entre les extrémités du cylindre selon  $z$ , et donne une contribution non-nulle par unité de longueur lorsque la longueur du cylindre devient grande. La valeur de  $\lambda_{||}$  est obtenue en divisant cette force numérique par la valeur moyenne de la vitesse sur le domaine fluide, également issue des simulations numériques. L'influence des plaques latérales est prise en compte en imposant une condition de vitesse nulle en  $x = \pm W/2$ . Une cellule de largeur infinie est modélisée en imposant un profil parabolique en  $x = \pm W/2$  (avec  $W$  assez grand).

La force mesurée expérimentalement est l'intégrale sur toute la longueur du cylindre de la force subie par le celui-ci. Comme la distance entre les plaques n'est pas constante dans la partie supérieure, la force par unité de longueur varie elle aussi. Cette force est plus faible

1.  $p$  est en fait ici l'écart à la pression hydrostatique. Nous cherchons en effet à calculer la contribution de la force due à l'écoulement, et pas la poussée d'Archimède.

2. La méthode numérique utilisée ici est classique (voir [64]), et nous ne la détaillons donc pas. Nous présentons une méthode numérique plus originale en annexe B.

là où cette distance est plus grande, parce que la vitesse locale est plus faible (le débit est le même dans tous les plans  $(x, y)$ ) et parce que le confinement (caractérisé par le rapport  $D/h$ , voir résultats de la section 1.4.4) est plus faible. Comme les écoulements considérés ici sont visqueux, et que l'angle du  $Y$  est faible, il est possible d'évaluer la force en utilisant l'approximation de lubrification [35] : nous supposons qu'en chaque plan  $(x, y)$  où la distance entre les plaques vaut  $h(z)$ , le champ de vitesse est le même qu'entre deux plaques parallèles infinies espacées de  $h(z)$ . Nous pouvons ainsi évaluer la force totale uniquement en utilisant les valeurs locales de la force  $f$ , obtenues par les calculs numériques 2D. La force hydrodynamique totale<sup>3</sup> s'écrit alors :

$$F_{lub.}(L) = \int_{-l}^L f(z) dz, \quad (1.5)$$

dans laquelle  $L$  est la longueur du cylindre située dans la région où la distance entre les plaques est constante (voir Fig. 1.1) et  $l$  est la partie contenue dans l'entrée ( $Y$ ). Dans le bain supérieur ( $z < -l$ ), la vitesse du fluide est suffisamment faible pour que cette contribution à la force totale soit négligeable. L'erreur ainsi faite a été évaluée expérimentalement en mesurant la force sur un cylindre court (20 mm de long) contenu entièrement dans le bain supérieur : la force mesurée valait toujours moins de 2% de la valeur correspondant au plus court cylindre utilisé dans les expériences de mesure de  $\lambda_{||}$ .

### 1.3.1.2 Cas d'un fluide rhéofluidifiant

Dans cette section, nous décrivons la méthode que nous avons utilisée pour modéliser les expériences menées avec du scléroglycane, qui est un fluide rhéofluidifiant (voir Fig. 1.2). Il s'agit d'une modélisation simplifiée, où nous considérons que le fluide non-newtonien n'est pas thixotrope et qu'il peut être décrit, dans une mesure de rhéométrie de Couette par une viscosité  $\eta$  qui dépend uniquement du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Le cylindre est assez long pour considérer que l'écoulement est invariant selon la direction de l'écoulement, et que le problème est 2D (voir Fig. 1.1 (a)).

À cause du caractère non-newtonien du fluide, l'équation de Stokes (Éq. (A.5)) n'est pas valable. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit en introduisant les contraintes visqueuses :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}') = \mathbf{grad}(p), \quad (1.6)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}'$  est le tenseur des contraintes visqueuses et  $p$  la pression. Cette équation peut se réécrire composante par composante sous la forme du système suivant :

$$\frac{\partial_x(\sigma'_{xx})}{\partial_x(\sigma'_{xx})} + \frac{\partial_y(\sigma'_{yx})}{\partial_y(\sigma'_{yx})} + \frac{\partial_z(\sigma'_{zx})}{\partial_z(\sigma'_{zx})} = \partial_x(p), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial_x(\sigma'_{xy})}{\partial_x(\sigma'_{xy})} + \frac{\partial_y(\sigma'_{yy})}{\partial_y(\sigma'_{yy})} + \frac{\partial_z(\sigma'_{zy})}{\partial_z(\sigma'_{zy})} = \partial_y(p), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial_x(\sigma'_{xz})}{\partial_x(\sigma'_{xz})} + \frac{\partial_y(\sigma'_{yz})}{\partial_y(\sigma'_{yz})} + \frac{\partial_z(\sigma'_{zz})}{\partial_z(\sigma'_{zz})} = \partial_z(p), \quad (1.9)$$

où les traits sous les termes servent uniquement comme étiquette pour une discussion dans la suite de cette section. Pour résoudre ces équations, nous devons connaître la loi rhéologique du fluide. Comme nous n'avons caractérisé la rhéologie du fluide que pour un seul écoulement (celui de Couette), nous devons intuitiver la loi rhéologique valable pour un écoulement quelconque. Nous supposons que la loi rhéologique du fluide est :

$$\sigma'_{ij} = \eta(\dot{\gamma}) (\partial_i(V_j) + \partial_j(V_i)), \quad (1.10)$$

3. due à l'écoulement, nous ne nous intéressons pas à la poussée d'Archimède.

qui a la propriété d'être invariante par changement de référentiel. L'écoulement est supposé parallèle :  $\mathbf{V} = V_z(x, y)\mathbf{e}_z$  et nous définissons  $\dot{\gamma}$  (dans ce cas particulier) par (voir [65]) :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(\partial_x(V_z))^2 + (\partial_y(V_z))^2}. \quad (1.11)$$

De plus, d'après la loi rhéologique (1.10) et cette hypothèse d'écoulement parallèle, les termes soulignés des equations (1.7), (1.8) et (1.9) sont nuls. L'équation (1.7) devient :

$$\partial_z (\underline{\eta(\dot{\gamma})\partial_x(V_z)}) = \partial_x(p). \quad (1.12)$$

Le terme souligné de l'équation (1.12) est indépendant de  $z$  à cause de l'invariance suivant  $z$  de la vitesse : le premier terme de l'équation (1.12) est nul, d'où l'on déduit que  $p$  est indépendant de  $x$ . Le même raisonnement pour (1.8) montre que  $p$  est indépendant de  $y$ . La pression ne dépend donc que de  $z$ . À cause de l'invariance par translation, le gradient de pression est constant selon  $z$  et sera noté  $G = \partial_z(p)$ . Il faut donc résoudre l'équation non-linéaire à une inconnue  $V_z$  issue de (1.9) :

$$\partial_x(\eta(\dot{\gamma})\partial_x(V_z)) + \partial_y(\eta(\dot{\gamma})\partial_y(V_z)) = G. \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) est résolue itérativement avec le logiciel FreeFem++ : l'équation (1.13) est d'abord résolue pour une valeur constante de la viscosité  $\eta$  (ce qui revient à résoudre le problème d'un fluide newtonien), puis à chaque étape le champ de viscosité est calculé à partir du champ de vitesse de l'étape précédente. Nous observons que cette méthode converge vers une solution stationnaire. La force par unité de longueur selon  $z$  sur le cylindre est obtenue en ajoutant à la contribution de pression  $\pi d^2 G/4$  la contribution de friction donnée par :

$$\begin{aligned} f_\nu &= \oint_{\mathcal{C}} \left( [\sigma'_{xz}\mathbf{e}_x + \sigma'_{yz}\mathbf{e}_y] \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}} (\eta(\dot{\gamma}) [\partial_x(V_z)n_x + \partial_y(V_z)n_y]), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire de composantes  $(n_x, n_y)$ , et  $\mathcal{C}$  le cercle délimitant le cylindre dans le plan  $(x, y)$ .

### 1.3.2 Calcul de $\lambda_\perp$

Dans le cas où le cylindre est perpendiculaire à l'écoulement, nous n'avons étudié que des fluides newtoniens. Nous avons modélisé successivement cette situation par une approche 2D (voir Fig. 1.3) numériquement et analytiquement puis par une approche 3D, de manière numérique uniquement.

Dans le cas 2D, le débit  $Q = h_0 U_m$ , à travers les sections  $z = \text{constante}$  et par unité de longueur selon  $x$ , se conserve (écoulement incompressible). Le nombre de Reynolds  $Re = \rho_f Q / \eta$  est donc le même loin de l'obstacle et dans la zone de faible ouverture. Si ce nombre de Reynolds est faible (ce que nous supposons), l'écoulement est partout dominé par la viscosité, même si le confinement est important (et que la vitesse du fluide est donc très importante dans la zone de faible espacement entre le cylindre et la paroi). En section 1.5, nous montrerons que l'inertie du fluide est effectivement sans effet notable sur la valeur de  $\lambda_\perp$  jusqu'à  $Re = 5$ .

### 1.3.2.1 Calcul numérique 2D

Dans cette approche 2D, l'écoulement est supposé invariant dans la direction  $x$ , de telle sorte que  $\mathbf{V} = V_y(y, z)\mathbf{e}_y + V_z(y, z)\mathbf{e}_z$ . L'équation de Stokes 2D ainsi que l'équation d'incompressibilité sont résolues numériquement à l'aide de FreeFem++ [64]. Entre deux plaques parallèles infinies, à faible nombre de Reynolds, le profil de vitesse est parabolique (profil de Poiseuille [35]). Nous choisissons donc un profil de Poiseuille en entrée, et une condition de sortie libre en sortie ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ ). Le maillage contient au moins 15000 nœuds ; la longueur dans la direction  $z$  du domaine où l'écoulement est simulé est au moins huit fois plus long que la hauteur dans la direction  $y$ .

### 1.3.2.2 Calcul analytique 2D

Il est possible de calculer  $\lambda_{\perp}$  analytiquement de manière approchée pour des cylindres dont le diamètre  $d$  est proche de la distance  $h$  entre les parois [50], lorsque le cylindre est à mi-distance entre les plaques ou en contact avec une paroi. Nous commençons par étudier le cas d'un cylindre à mi-distance des plaques. Dans la zone de faible espacement, la vitesse est maximale (par conservation du débit) : le cisaillement du fluide est très fort. L'essentiel de la friction et de la perte de charge  $y$  est ainsi localisée. De plus, dans cette zone, le cylindre est presque parallèle à la paroi, et il est possible d'utiliser l'approximation de lubrification. Près des zone de faible espacements, le cercle peut être approché par deux paraboles (une

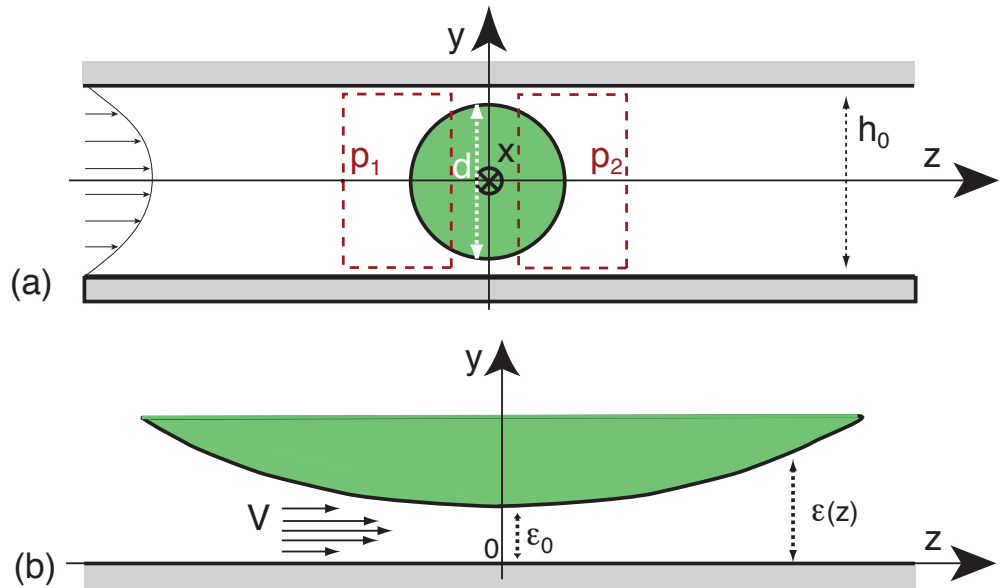


FIGURE 1.4 – Cas d'un cylindre perpendiculaire à l'écoulement, dans le cas où le diamètre  $d$  est proche de  $h_0$ . (a) : schéma global. (b) : zoom de la zone de faible espacement.

de chaque côté du cylindre). La distance  $\varepsilon(z)$  entre le bord de la cellule de Hele-Shaw et le cylindre vaut (voir Fig. 1.4 (b)) :

$$\varepsilon(z) \simeq \varepsilon_0 + \frac{z^2}{d}, \quad (1.15)$$

où  $\varepsilon_0 = h_0/2 - d$  est la distance minimale entre le bord de la cellule et le cylindre. Dans le cadre de l'approximation de lubrification, la variation de la vitesse avec la distance  $y$

correspond à un profil de Poiseuille pour toutes les valeurs de  $z$  :

$$\mathbf{V}(y, z) = K(z)y(\varepsilon(z) - y)\mathbf{e}_z, \quad (1.16)$$

où  $K(z)$  est une fonction à déterminer ; l'origine des  $y$  est prise (dans ce calcul uniquement) sur la paroi étudiée (voir Fig. 1.4 (b)). La fonction  $K(z)$  est obtenue en écrivant la conservation du débit  $Q$  :

$$\frac{Q}{2} = \int_0^{\varepsilon(z)} V(y, z) dy = K(z) \frac{\varepsilon(z)^3}{6}. \quad (1.17)$$

La vitesse est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{V}(y, z) = \frac{3Q}{\varepsilon(z)^3} y(\varepsilon(z) - y)\mathbf{e}_z. \quad (1.18)$$

La force de friction qui s'exerce sur le cylindre  $f_v$  s'écrit :

$$\begin{aligned} f_v &= -2\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{y=\varepsilon(z)} dz, \\ &= 2\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3Q}{\varepsilon(z)^2} dz, \\ &= (\eta U_m) \left( 6\pi\sqrt{2} \frac{\beta^{1/2}}{(1-\beta)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Pour obtenir cette expression, nous avons utilisé Éq. (1.18), Éq. (A.6) et Éq. (A.2). Le facteur 2 est dû au fait qu'il y a deux zones de faible épaisseur, et le signe  $-$  est lié aux conventions d'orientation de la normale. Dans ce calcul, la normale est approximée par le vecteur  $-\mathbf{e}_z$ . L'intégrale curviligne sur le demi-cercle est remplacée dans le cadre de l'approximation de lubrification par une intégrale ordinaire sur la variable  $z$  prise entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , ce qui simplifie le calcul. Cette simplification est justifiée car l'intégrant ne prend des valeurs importantes qu'au voisinage de 0.

Le cylindre subit également une force de pression  $f_p$ . L'essentiel de la chute de pression est localisée près de zone de faible épaisseur. Loin de cette zone, nous pouvons considérer que la pression est approximativement constante, et vaut  $p_1$  et  $p_2$  de part et d'autre (voir Fig. 1.4 (b)). D'après l'équation de Stokes (Éq. (A.5)), le gradient de pression vaut  $\partial p/\partial z = \eta 6Q/\varepsilon(z)^3$ . La différence de pression entre l'amont et l'aval se calcule en intégrant ce gradient de pression :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \frac{6Q}{(\varepsilon(z))^3} dz. \quad (1.20)$$

D'après l'équation (A.2), les contraintes liées à la pression sont importantes dans les parties du cercle situées dans les rectangles pointillés (Fig. 1.4 (b)). Dans ces deux zones, la pression est approximativement constante, est vaut respectivement  $p_1$  et  $p_2$ . Il est possible d'estimer la force de pression résultante  $f_p$  par :

$$f_p = d\Delta p = (\eta U_m) \left( 9\pi\sqrt{2} \frac{\beta^{3/2}}{(1-\beta)^{5/2}} \right), \quad (1.21)$$

La force totale  $f = f_v + f_p$  qui s'exerce sur le cylindre est donc bien proportionnelle à  $\eta U_m$ , dirigée selon  $+\mathbf{e}_z$ , ce qui permet de définir effectivement  $\lambda_{\perp}$  :

$$\lambda_{\perp}(\beta, G_y = 0) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \underbrace{6\pi\sqrt{2} \frac{\beta^{1/2}}{(1-\beta)^{3/2}}}_{\text{friction}} + \underbrace{9\pi\sqrt{2} \frac{\beta^{3/2}}{(1-\beta)^{5/2}}}_{\text{pression}}, \quad (1.22)$$

TABLE 1.3 – Comparaison des valeurs de  $\lambda_{\perp}$  obtenues analytiquement ou numériquement par différent auteurs, dans le cas d'un cylindre situé au milieu de deux plaques. La solution analytique de [50] est l'équation (1.22); tous les résultats correspondent au cas 2D.

$\beta$	Numérique travail présenté	Numérique [50]	Analytique [66]	Analytique [50]
0,01	5,100	5,309	5,109	
0,1	13,34	13,74	13,36	11,52
0,4	72,69	73,28	72,93	72,55
0,6	262,4	266,8		265,3
0,8	1850	1884		1866
0,96	$1,205 \times 10^5$	$1,149 \times 10^5$		$1,208 \times 10^5$
0,99	$3,955 \times 10^6$	$3,174 \times 10^6$		$3,965 \times 10^6$

qui diverge lorsque  $\beta \rightarrow 1$ . Cette divergence de la force traduit le fait que, lorsque le cylindre a un diamètre proche de la distance entre les plaques, l'écoulement est bloqué et doit passer dans un canal très étroit. Il est à noter que la contribution due à la chute de pression est la contribution dominante lorsque  $\beta \rightarrow 1$ .

Le calcul de  $\lambda_{\perp}$  s'effectue de manière analogue si le cylindre touche une des deux plaques, et donne :

$$\lambda_{\perp}(\beta, G_y = (1 - \beta)/2) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \underbrace{3\pi \frac{\beta^{1/2}}{(1 - \beta)^{3/2}}}_{\text{friction}} + \underbrace{\frac{9\pi}{2} \frac{\beta^{3/2}}{(1 - \beta)^{5/2}}}_{\text{pression}}, \quad (1.23)$$

Le rapport des valeurs de  $\lambda_{\perp}$  pour un même cylindre touchant une plaque ou au milieu des plaques tend vers  $2\sqrt{2}$  lorsque le diamètre du cylindre est comparable à la distance entre les plaques :

$$\frac{\lambda_{\perp}(\beta, G_y = 0)}{\lambda_{\perp}(\beta, G_y = (1 - \beta)/2)} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 2\sqrt{2}, \quad (1.24)$$

ce qui signifie que la force qui s'exerce sur un cylindre centré est supérieure à celle qui s'exerce sur un cylindre qui touche une paroi.

### 1.3.2.3 Comparaison des résultats numériques et analytique 2D

Afin de valider la procédure de simulation numérique, nous les avons comparé (voir Tab. 1.3), dans le cas d'un cylindre à mi-distance entre les plaques, les résultats obtenus numériquement à la solution analytique de Faxen [66] valable lorsque  $\beta \rightarrow 0$ , à la solution analytique Éq. (1.22) qui est valable lorsque  $\beta \rightarrow 1$ , et aux résultats numériques de A. ben Richou [50]. L'accord entre ces valeurs valide les simulations numériques. De plus, nous remarquons que la solution obtenue grâce à l'approximation de lubrification est valable même hors de son domaine de validité *a priori* : le développement autour de  $\beta = 1$  donne déjà un résultat exact à 20% près à  $\beta = 0, 1$  !

### 1.3.2.4 Calcul numérique 3D

L'approche 2D suppose que le cylindre est infiniment long, et ne décrit en conséquence que le cas des cylindres de longueur presque égale à la largeur de la cellule ( $L = W$  en

Fig. 1.1 ). Si  $L < W$ , le fluide peut dévier des plans  $z = \text{constante}$  et contourner le cylindre. Cet effet peut réduire fortement la force sur le cylindre par rapport au cas 2D. Il est donc nécessaire de résoudre l'équation de Stokes 3D (voir Éq. (A.5)) pour modéliser ces expériences. Cette résolution a été effectuée à l'aide du logiciel FreeFem3D [67]. Ce logiciel est encore en développement, seuls les éléments finis  $P1$  sont disponibles, et nous avons dû stabiliser la pression par pénalisation. Les maillages ont été générés avec Gmsh [68], et le nombre de nœuds est d'au moins 70000. Le rapport entre les longueurs dans les directions  $x$  et  $y$  vaut 18 (comme dans la cellule expérimentale), et le rapport entre les longueurs dans les directions  $y$  et  $z$  vaut 12.

## 1.4 Résultats expérimentaux et numériques pour $\lambda_{||}$

La plupart des études antérieures à celle que nous avons menée ont abordé uniquement le cas des cylindres peu confinés (*i.e.*  $\beta \ll 1$ ) ou localisés à mi-distance des plaques. Dans le cas d'un fil soumis à un écoulement en géométrie confinée, le diamètre du fil est proche de l'ouverture de la cellule (c'est le cadre de l'étude que nous nous sommes fixés) et le fil n'est pas *a priori* centré. Dans cette section, nous quantifions la gamme de nombres de Reynolds pour lesquels l'équation de Stokes est suffisante pour décrire la force de traînée sur le cylindre. Cette détermination est réalisée expérimentalement en vérifiant que les forces sont bien proportionnelles à la vitesse du fluide et à la viscosité. Dans ce cas, le coefficient  $\lambda_{||}$  est bien défini, et nous étudions sa variation avec les paramètres géométriques.

### 1.4.1 Traînée en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement

Dans cette section, nous présentons les limites de validité du régime de Stokes pour la force de traînée, en présentant la variation de cette force avec la vitesse. Nous étudions d'abord le cas d'un fluide newtonien à faible nombre de Reynolds ( $Re < 3$ ), qui est bien décrit par l'équation de Stokes, puis ceux d'un fluide newtonien en régime inertiel ( $Re \sim 100$ ) et d'un fluide non-newtonien pour lesquels ce n'est pas le cas.

#### 1.4.1.1 Fluide newtonien en régime de Stokes

La figure 1.5 présente une série de mesures obtenues pour un mélange eau-glycérol ; la ligne en pointillés correspond à des résultats numériques 2D (voir section 1.3.1), obtenus en résolvant l'équation de Stokes. Expérimentalement, la force augmente toujours linéairement avec la vitesse dans le cas des mélanges eau-glycérol, ce qui indique que les effets inertiels sont négligeable jusqu'à  $Re = 15$ . De plus, comme sur l'exemple présenté Fig. 1.5 , l'accord entre les résultats expérimentaux et numériques est bon (écart inférieur à 5% pour toutes les expériences effectuées pour mesurer  $\lambda_{||}$ ), et ceci sans paramètre ajustable. Notons que la reproductibilité des expériences est bonne : la figure 1.5 présente deux valeurs expérimentales pour chaque débit (débit croissant et décroissant), qui sont confondues.

Étant donné le bon accord entre la modélisation et l'expérience, il est possible d'utiliser ce dispositif pour mesurer une viscosité, lorsque le débit et la géométrie sont connues. Cette application possible a fait l'objet d'un dépôt de brevet (FR0805718). Cependant, dans la présente réalisation utilisant des plaques planes parallèles, la quantité de fluide nécessaire est importante, ce qui est défavorable si les fluides sont coûteux ou difficiles à obtenir en grande quantité (sang par exemple). Une géométrie mieux adaptée, consistant en un cylindre inséré dans un tube (à la place des deux plaques) a été développée par M.-H. Noël [69].



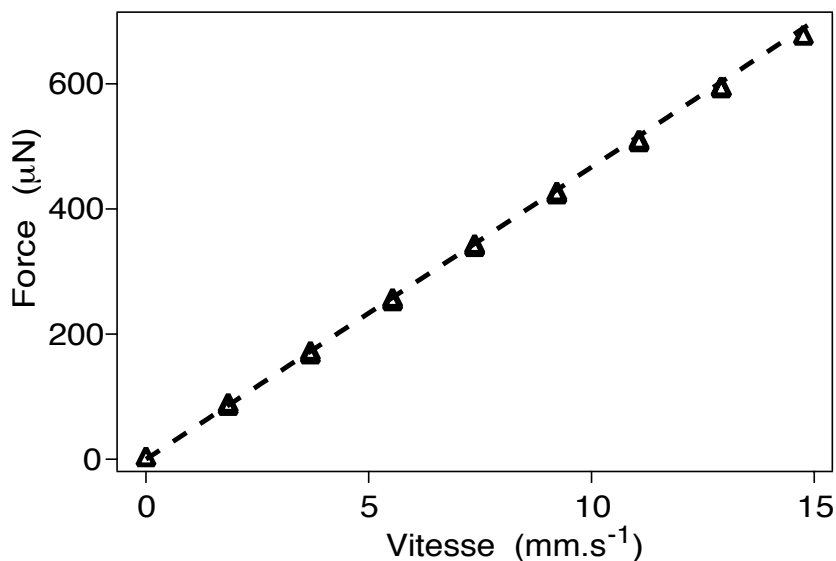


FIGURE 1.5 – Variation de la force sur un cylindre vertical à mi-distance des deux plaques en fonction de la vitesse moyenne  $U_m$  pour un mélange eau-glycérol.  $D = 1,5$  mm,  $h_0 = 4,9$  mm,  $\beta = 0,3$ ,  $\rho_f = 1,165$  kg  $\cdot$  m<sup>-3</sup>,  $\eta = 40,0$  mPa  $\cdot$  s et  $0 \leq Re \leq 2,2$ . ( $\Delta$ ) : résultats expérimentaux. Pointillés : résultats numériques.

#### 1.4.1.2 Fluide newtonien en régime inertiel

Lorsque nous utilisons de l'eau, le nombre de Reynolds est plus élevé, et la force augmente plus que linéairement avec la vitesse, comme le montre la figure 1.6. En géométrie parallèle infinie, le terme  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V}$  s'annule exactement, et les effets inertiels n'apparaissent que lorsque l'écoulement devient turbulent, à  $Re = 900$  environ [63]. Il est donc probable que les non-linéarités observées soient localisées principalement à l'entrée (où la cellule ne peut être considérée comme infinie, et où les parois ne sont pas parallèles) et en partie à l'extrémité du cylindre. Pour vérifier cette hypothèse, il aurait fallu soustraire la valeur de force pour un cylindre long et celle pour un cylindre qui s'arrête dans le Y. Il s'agit de soustraire deux valeurs faibles, ce qui induit des incertitudes importantes, et nous n'avons pas effectué cette mesure.

La force reste proportionnelle à la vitesse uniquement pour  $0 \leq Re \leq 20$  (en bon accord avec les simulations numériques). Cependant, même pour des nombres de Reynolds de 200, l'évaluation de la force en utilisant la modélisation du régime visqueux donne encore l'ordre de grandeur correct de cette force (30% d'écart).

#### 1.4.1.3 Fluide non-newtonien en régime visqueux

Nous avons également effectué des mesures de la force de traînée s'exerçant sur un cylindre lors de l'écoulement d'une solution aqueuse de scléroglycane, dont un exemple est présenté figure 1.7. La force augmente plus lentement que linéairement avec la vitesse, ce qui est cohérent avec le caractère rhéofluidifiant du fluide. En effet, lorsque la vitesse (et donc le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ ) augmente, la viscosité effective  $\eta_e$  diminue. Qualitativement, par analogie avec le cas newtonien, la force hydrodynamique est proportionnelle à  $\eta_e U_m$ , et augmente donc moins vite que  $U_m$ .

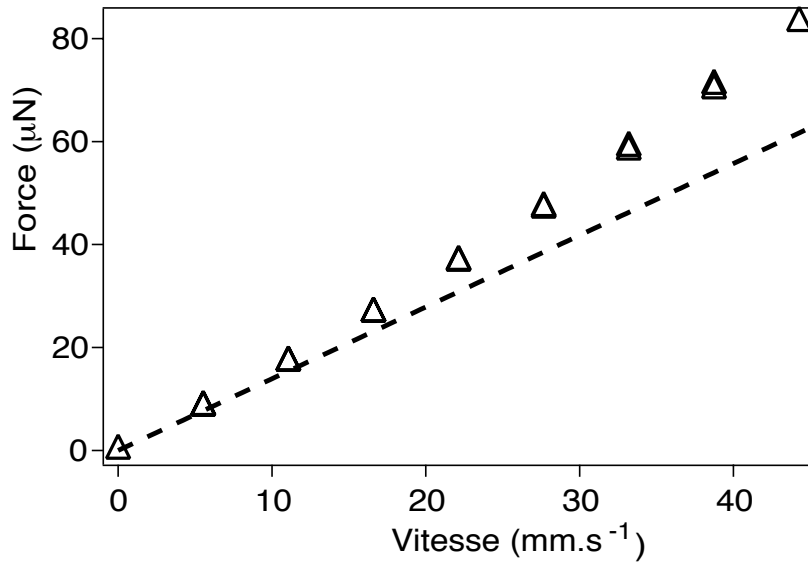


FIGURE 1.6 – Même mesure que Fig. 1.5 en utilisant de l'eau.  $\rho_f = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\eta = 1,0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  et  $0 \leq Re \leq 220$ . ( $\Delta$ ) : expériences. Pointillés : résultats numériques.

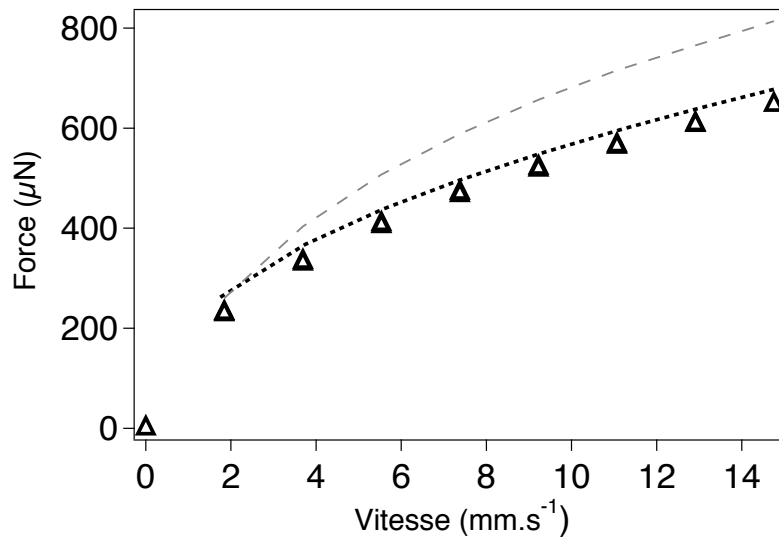


FIGURE 1.7 – Mesure similaire à celle de la Fig. 1.5 en utilisant une solution aqueuse de scléroglycane (fluide rhéofluidifiant).  $D = 1,5 \text{ mm}$ ,  $h_0 = 4,9 \text{ mm}$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\rho_f = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $L = 24 \text{ cm}$ , caractéristiques rhéologiques du fluide donné par la figure 1.2. ( $\Delta$ ) : expériences. Pointillés : résultats numériques (voir section 1.3.1). Tirets gris fins : calcul approché

La modélisation numérique de l'écoulement non-newtonien (voir section 1.3.1) permet de retrouver de manière quantitative la force sur le cylindre (voir Fig. 1.7 ). Dans notre expérience, il est possible d'estimer l'ordre de grandeur de cette force en utilisant le coefficient  $\lambda_{\parallel}$  calculé dans le cas newtonien, et en estimant la viscosité effective  $\eta_e$  à partir de la courbe rhéologique du fluide (voir Fig. 1.2 ) et en supposant le taux de cisaillement égal à  $U_m/h_0$ . Cette estimation (qui correspond aux tirets gris de Fig. 1.7 ), donne effectivement le bon ordre de grandeur de la force (écart d'environ 25% pour la courbe présentée). L'accord entre les valeurs expérimentales et celles obtenues par simulation numérique montre que l'écart entre le cas du scléroglycane et le cas d'un fluide newtonien n'est dû qu'à la variation de la viscosité effective avec le taux de cisaillement, il n'y a pas d'effets supplémentaires (élasticité du fluide, par exemple).

### 1.4.2 Variation de la traînée avec la viscosité

Tout d'abord, l'accord quantitatif dans la figure 1.5 entre les données expérimentales et les prédictions numériques, obtenu sans paramètre ajustable, suggère fortement que la modélisation que nous avons développée est valable pour les écoulements à  $Re < 20$ , et en particulier l'hypothèse de linéarité de la force avec la viscosité.

De manière plus directe, nous avons réalisé deux expériences (correspondant aux points ( $\diamond$ ) et ( $\nabla$ ) de la figure 1.9(a)) avec la même configuration expérimentale, excepté la viscosité  $\eta$  du fluide qui diffère d'un facteur 2. Les résultats coïncident, aux incertitudes expérimentales près, ce qui confirme que la force est bien proportionnelle à la viscosité.

### 1.4.3 Champ de vitesse numérique

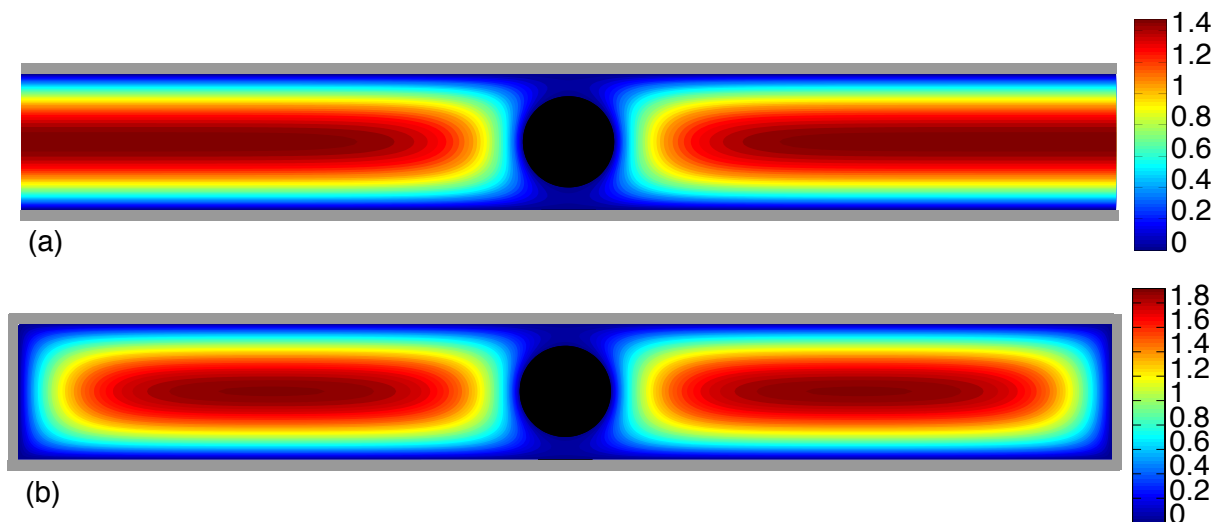


FIGURE 1.8 – Champ de vitesse (numérique) dans le cas d'un écoulement parallèle au cylindre, pour un cylindre de diamètre adimensionné  $\beta = 0,66$  centré. (a) : cas sans paroi latérale (zoom). (b) : cas avec parois latérales (dans les simulations utilisées pour la détermination de  $\lambda_{\parallel}$ , les parois latérales sont nettement plus éloignées que sur la figure).

Dans cette section, nous décrivons qualitativement le champ de vitesse obtenu numériquement qui nous aidera à interpréter les résultats obtenus pour  $\lambda_{\parallel}$ .

Nous observons dans la figure 1.8(a) qu'il existe une zone morte (très faible vitesse) entre le cylindre et les parois. La perturbation due au cylindre s'atténue sur une distance suivant  $x$  de l'ordre de la distance entre les plaques; plus loin l'écoulement est un profil parabolique de Poiseuille. Le fait que cette distance d'atténuation est la même que la distance entre les plaques (au moins lorsque le diamètre du cylindre du même ordre de grandeur que cette distance) est une propriété de l'équation de Laplace [70].

L'effet des parois latérales, sur lesquelles la vitesse du fluide est nulle, est de diminuer la vitesse à leur voisinage, sur une longueur (en  $x$ ) de l'ordre de  $h_0$  (voir Fig. 1.8 (a)). Comme nous adimensionnons le champ de vitesse par la vitesse moyenne, la vitesse maximale ainsi que la vitesse près du cylindre est plus importante dans le cas où il y a des parois latérales que lorsqu'elles sont absentes.

#### 1.4.4 Variation de $\lambda_{||}$ avec le diamètre

Dans cette section, nous étudions comment la valeur de  $\lambda_{||}$  varie avec le diamètre adimensionné  $\beta$  qui quantifie le confinement, lorsque le cylindre est situé à mi-distance des plaques.

##### 1.4.4.1 Traitement des données expérimentales

Expérimentalement, nous déterminons  $\lambda_{||}$  à partir de la mesure de la force sur le cylindre, et nous faisons varier le confinement en changeant le diamètre de celui-ci ou l'ouverture de la cellule.

Cependant, dans notre dispositif, la distance entre les plaques (et donc le confinement) n'est pas constant à l'entrée (en haut) de la cellule. En conséquence, la force par unité de longueur augmente continûment le long du cylindre et n'est constante que dans la zone d'ouverture  $h_0$  constante. Pour déterminer la valeur de  $\lambda_{||}$ , nous avons répété deux fois la même expérience avec deux cylindres de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  (assez longs pour atteindre la partie où l'ouverture est constante). À partir de l'équation 1.5, nous en déduisons que  $\Delta F = \lambda_{||} U_m (L_1 - L_2)$ , ce qui permet de mesurer  $\lambda_{||}$ .

La figure 1.9(a) présente les valeurs obtenues en soustrayant les forces mesurées pour deux cylindres de longueurs différentes (symboles ( $\square$ ,  $\boxplus$ ,  $\boxtimes$ )). Les résultats numériques pour une cellule de rapport de forme  $W/h_0 = 18$  (*i.e.* d'ouverture  $h_0 = 4,9$  mm) qui correspond à ces expériences sont aussi représentés sur la même figure, et sont en accord avec les résultats expérimentaux.

Dans nos expériences, la partie  $l$  de la longueur du cylindre située dans la partie en Y est généralement plus petite que la longueur  $L$  à l'intérieur de la zone d'ouverture constante, de sorte que son influence sur la valeur de la force totale est relativement faible. En pratique, et de manière à déterminer  $\lambda_{||}$  à partir d'une seule mesure de force, nous avons estimé de manière approchée la force à l'intérieur du Y en supposant que, même si  $h$  dépend de  $z$ , la valeur de  $\lambda_{||}$  est la même dans toutes les sections. La diminution de la force dans le Y a été ainsi partiellement prise en compte en écrivant la diminution de la vitesse moyenne  $U(z) = h_0 U_m / h(z)$  (à cause de la conservation du débit). L'équation (1.5) devient alors :  $F = \lambda_{||} \eta U_m (L + \int_{-l}^0 (h/h(z)) dz)$  avec  $h(z) = h_0 + (h_0 - h_i)z/l$  ( $h_i$  est l'ouverture dans le haut de la partie en Y).  $\lambda_{||}$  est alors reliée à la force  $F$  par :  $\lambda_{||} = F / (\eta U_m L^*)$  où  $L^* = L + l h_0 \ln(\frac{h_i}{h_0}) / (h_i - h_0)$  est une longueur équivalente. Tous les points de la figure 1.9(a), sauf ceux correspondant aux symboles ( $\square$ ,  $\boxplus$ ,  $\boxtimes$ ), ont été obtenus par la méthode de la longueur équivalente que nous venons de décrire. Cette approximation est validée par la faible

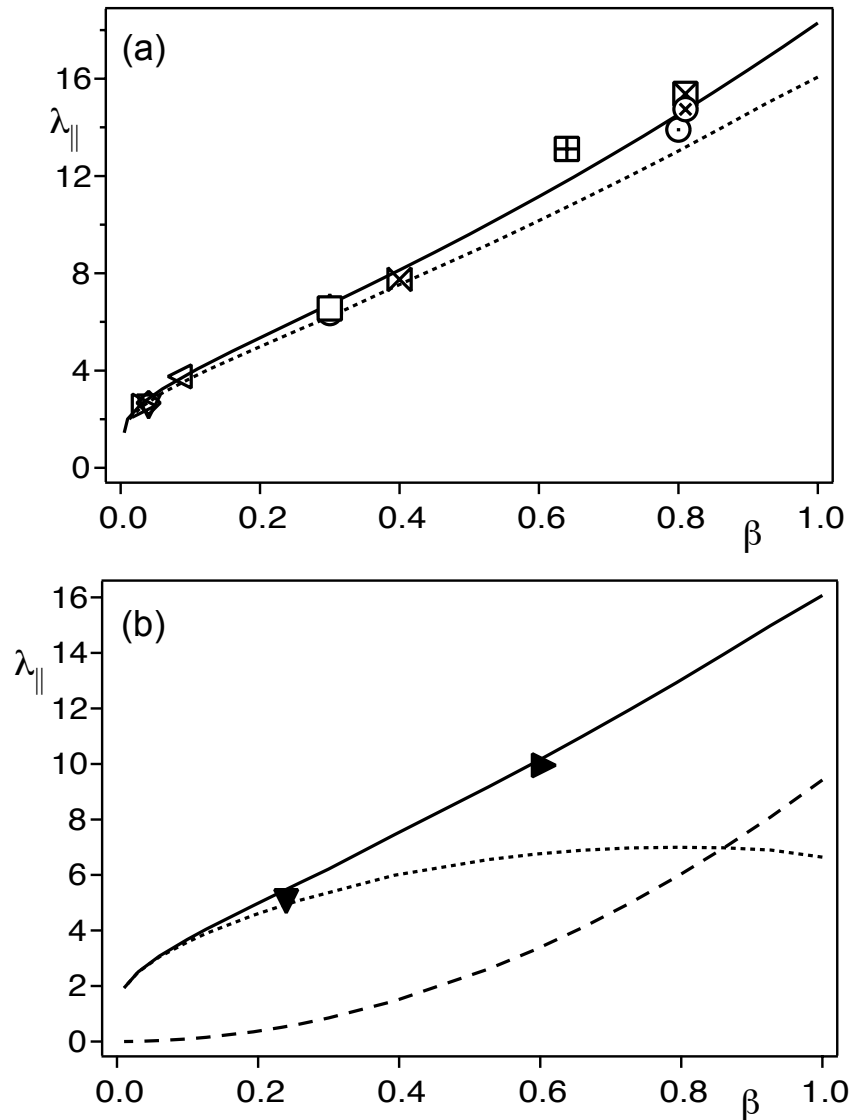


FIGURE 1.9 – Variation de  $\lambda_{||}$  avec  $\beta = d/h_0$  pour des cylindres situés à mi-distance des deux plaques. Les symboles correspondent aux points expérimentaux, et sont définis dans la table 1.1. Lignes continues : résultats numériques 2D. (a) : cellule de rapport de forme  $W/h_0 \approx 18$  ( $h_0 = 4,9$  mm). Tirets : résultats numériques dans la limite  $W/h_0 \rightarrow \infty$ . (b) : cellule de très grand rapport de forme  $W/h_0 = 120$  ( $h_0 = 0,75$  mm); Pointillés : terme de friction visqueuse, tirets : terme de pression.

différence entre les valeurs obtenues pour les mêmes paramètres expérimentaux par cette méthode ( $\otimes$ ) et par soustraction de la force pour deux cylindres de longueurs différents ( $\boxtimes$ ).

#### 1.4.4.2 Influence de la nature du cylindre

Les valeurs expérimentales et numériques obtenues pour  $\lambda_{\parallel}$  sont en bon accord (voir Fig. 1.9 (a)). Les données expérimentales ont été obtenues pour des cylindres de natures différentes (voir Tab. 1.1) : tiges rigides (PMMA, fer), tubes (verre), fils de couture multibrins de diamètre irrégulier (soie, polyester). Ceci montre que la valeur de  $\lambda_{\parallel}$  dépend essentiellement du diamètre moyen et pas des irrégularités de la surface du cylindre, comme cela est attendu en régime de Stokes (voir comme autre exemple la partie correspondant aux faibles nombre de Reynolds dans le diagramme de Moody cité dans [35]). En ce qui concerne les tubes (verre), la force due à l'écoulement à l'intérieur du tube compense exactement le défaut de la force de pression (cela résulte du bilan de quantité de mouvement sur le fluide à l'intérieur du tube).

#### 1.4.4.3 Influence des parois latérales

Dans la figure 1.9(a), les points expérimentaux sont (comme cela est attendu) plus proche des résultats numériques (ligne continue) obtenus en prenant en compte le rapport de forme fini de la cellule  $W/h_0 = 18$  que lorsque la largeur  $W$  de la cellule est supposée infinie (tirets). La différence entre ces deux courbes est néanmoins faible, de l'ordre de 10%, ce qui montre que l'effet des parois latérales est faible. L'effet de ces parois solides est d'augmenter la vitesse près du cylindre (voir section 1.4.3) ; et donc la force et de  $\lambda_{\parallel}$  (ce qui va bien dans le sens des deux courbes de Fig. 1.9 (a)).

Cette correction devient complètement négligeable dans le cas de la cellule plus étroite ( $h_0 = 0,75$  mm et  $W/h_0 = 120$ ) et les résultats sont les mêmes que pour  $W/h_0 \rightarrow +\infty$ . Pour cette cellule, il est plus difficile de contrôler expérimentalement la position du cylindre. Les deux valeurs expérimentales obtenues (en utilisant la méthode de la longueur équivalente) sont toutefois en bon accord avec les calculs numériques (voir Fig. 1.9 (b)). De plus, l'utilisation des deux cellules permet de confirmer que le diamètre du cylindre n'intervient que par le rapport adimensionné  $\beta = D/h_0$ .

D'autre part, notons que la valeur de  $\lambda_{\parallel}$  ne dépend pas de la position exacte du cylindre dans la direction  $x$  (tant que celui-ci se trouve à plus de  $2h_0$  de la paroi latérale), parce que la perturbation du champ de vitesse due au cylindre s'amortit sur une longueur  $h_0$ . La variation avec  $x$  est si faible que nous n'avons pas pu la mesurer.

#### 1.4.4.4 Variation de $\lambda_{\parallel}$ avec $\beta$

Dans cette section nous nous focalisons sur le cas d'une cellule sans paroi latérales.

La valeur de  $\lambda_{\parallel}$  augmente avec  $\beta$ , c'est-à-dire que la force augmente avec le diamètre. Ceci est en accord (heureusement !) avec le théorème d'inclusion monotone valable en régime de Stokes (Hill et Power cités dans [71]). Ce théorème, qui repose sur l'ellipticité et la linéarité de l'équation de Stokes, assure que si un objet A est inclus dans un objet B, la force hydrodynamique qui s'exerce sur A est inférieure à celle qui s'exerce sur B, si les conditions aux limites sont les mêmes (ce qui est bien le cas pour une cellule infinie).

Toujours dans le cas d'une cellule de rapport de forme infini, nous calculons séparément le terme de pression (pointillées dans Fig. 1.9 (b)) et le terme de friction visqueuse (tirets dans Fig. 1.9 (b)). La force de friction visqueuse sature pour  $\beta > 0,2$ , puis diminue pour

$\beta > 0,8$  ; la force de pression augmente rapidement avec  $\beta$  (comme l'aire du cylindre, c'est-à-dire en  $\beta^2$ , voir section 1.3.1). Pour  $\beta > 0,2$ , la somme des deux contributions (*i.e.*  $\lambda_{||}$ ) augmente de manière approximativement linéaire avec  $\beta$  ( $\lambda_{||} \approx 2,1 + 13,8\beta$ ). La valeur de  $\lambda_{||}$  ne diverge pas pour  $\beta = 1$ , parce que le cylindre perturbe faiblement l'écoulement : le fluide peut facilement passer à côté du cylindre (voir section 1.4.3).

### 1.4.5 Variation de $\lambda_{||}$ avec la position $G_y$ du cylindre dans l'ouverture

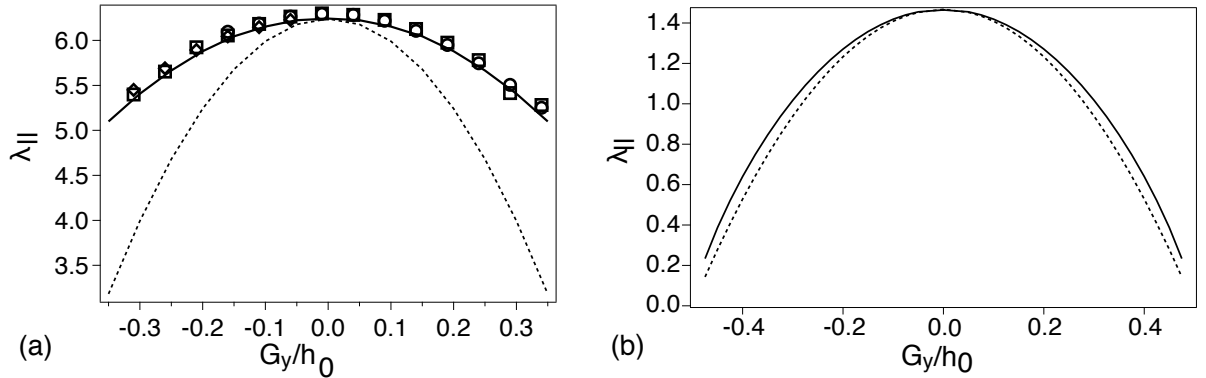


FIGURE 1.10 – Variation de  $\lambda_{||}$  avec la distance normalisée  $G_y/h_0$  à partir du plan médian, voir Fig. 1.1 (a) :  $d = 1,5$  mm et  $h_0 = 4,9$  mm. Les autres paramètres sont les mêmes que pour la ligne correspondant au symbole  $\triangle$  de la table 1.1. La gamme de valeurs de  $G_y$  est limitée :  $|G_y/h_0| < |0,5 - d/(2h_0)| = 0,35$ . ( $\square$ ,  $\diamond$ ,  $\circ$ ) : répétitions successives de la même expérience. Ligne continue : résultat numérique pour la force; tirets : profil parabolique proportionnel au profil de Poiseuille. (b) :  $\beta = 0,002$ , les lignes ont la même signification que dans la figure (a).

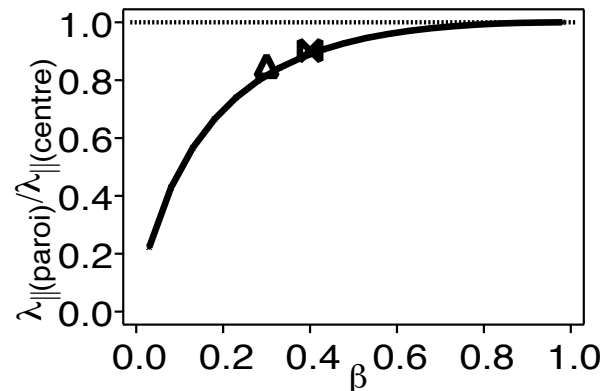


FIGURE 1.11 – Rapport des valeurs de  $\lambda_{||}$  à la paroi et au centre en fonction de  $\beta$ . ( $\triangle$ ) et ( $\bowtie$ ) : points expérimentaux; ligne continue : résultats numériques.

Le dispositif expérimental nous permet de positionner précisément (résolution de  $10 \mu\text{m}$ )

le cylindre dans l'ouverture de la cellule. Grâce à la possibilité de visualisation sur le côté, nous pouvons vérifier la valeur de la distance du cylindre au plan moyen des plaques.

Les valeurs expérimentales de  $\lambda_{\parallel}$  sont tracées en fonction de  $G_y/h_0$  en figure 1.10 (a). Dans ce cas, trois expériences successives sont réalisées pour vérifier la reproductibilité. Pour toutes les valeurs de  $\beta$  étudiées, la courbe a une allure parabolique avec un maximum en  $G_y/h_0 = 0$  (cylindre au centre). Le coefficient  $\lambda_{\parallel}$  décroît lorsque le cylindre s'approche de la paroi (ligne continue dans Fig. 1.10). Cette variation est plus faible que pour une loi parabolique de type Poiseuille (tirets).

La figure 1.11 donne la variation de  $\beta$  en fonction du rapport des valeurs de  $\lambda_{\parallel}$  pour un cylindre en contact avec une paroi et à mi-distance des plaques. L'allure de cette courbe est donnée par l'ajustement empirique  $1 - 0,9 \times \exp(-3,4\beta)$  dans la gamme  $0,03 \leq \beta \leq 1$ . Même si le profil de variation est partout parabolique,  $\lambda_{\parallel}$  décroît plus près des parois pour les faibles valeurs de  $\beta$ ; pour  $\beta \ll 1$ , cette variation est proche de celle d'un profil de type Poiseuille (voir Fig. 1.10 (b)). Cela est attendu puisque si le diamètre du cylindre est très faible, il est essentiellement sensible à la vitesse locale, qui suit un profil de Poiseuille.

## 1.5 Résultats expérimentaux et numériques pour $\lambda_{\perp}$

Comme nous l'avons vu, le cylindre perturbe faiblement l'écoulement dans le cas où il est parallèle à l'écoulement, puisque le fluide peut contourner la zone autour du cylindre. Au contraire, la perturbation est nettement plus importante lorsque que le même cylindre est placé perpendiculairement à l'écoulement. Plus précisément, la section d'écoulement est fortement réduite au voisinage du cylindre, en particulier lorsque  $\beta \rightarrow 1$ . Dans une approche 2D (voir section 1.3.2), c'est dans cette zone de faible ouverture que sont localisés les gradients de vitesse élevés (transverses, selon  $y$ ) ainsi que les forts gradients de pression (longitudinaux, selon  $z$ ).

Comme le cylindre est fixé à des fils de suspension, choisir sa position dans la cellule n'est pas évidente. Nous discutons ce problème dans la section 1.5.1. En section 1.5.2 nous donnerons la gamme de valeurs de nombre de Reynolds pour laquelle l'équation de Stokes est suffisante pour décrire la force sur le cylindre. La section 1.5.4 présente les résultats de mesures de la force pour différents diamètres et positions dans la cellule, mais uniquement dans le cas  $L \simeq W$ . L'effet de blocage est réduit lorsque la longueur du cylindre est plus petite que la largeur  $W$  de la cellule. En effet, une partie de l'écoulement est dévié vers la zone située entre l'extrémité du cylindre et la paroi latérale de la cellule, ce qui réduit la force qui s'exerce sur le cylindre. Cet effet de déviation au voisinage du cylindre est visible sur la figure 1.12(a) qui présente les lignes de courant expérimentales (obtenues par injection de colorant) près d'un cylindre (en rouge) perpendiculaire à l'écoulement. La section 1.5.5 présente les mesures expérimentales de  $\lambda_{\perp}$  en fonction de  $L/W$  ainsi que les résultats des simulations numériques 3D qui sont nécessaires pour modéliser cet effet de court-circuit.

### 1.5.1 Position du cylindre dans la cellule

Afin de mesurer une valeur pertinente de la force de traînée, il est nécessaire que la position du cylindre dans l'ouverture soit bien définie et ne change pas avec le débit. Nous observons que les cylindres de grandes longueurs ( $L \simeq W$ ) se placent spontanément à mi-distance des plaques, parallèlement à celles-ci, à partir de nombres de Reynolds assez faibles (0,1 dans les expériences que nous avons réalisées). Il s'agit d'un effet inertiel : étant donné la symétrie amont-aval de la géométrie, il ne peut en effet y avoir de portance en régime



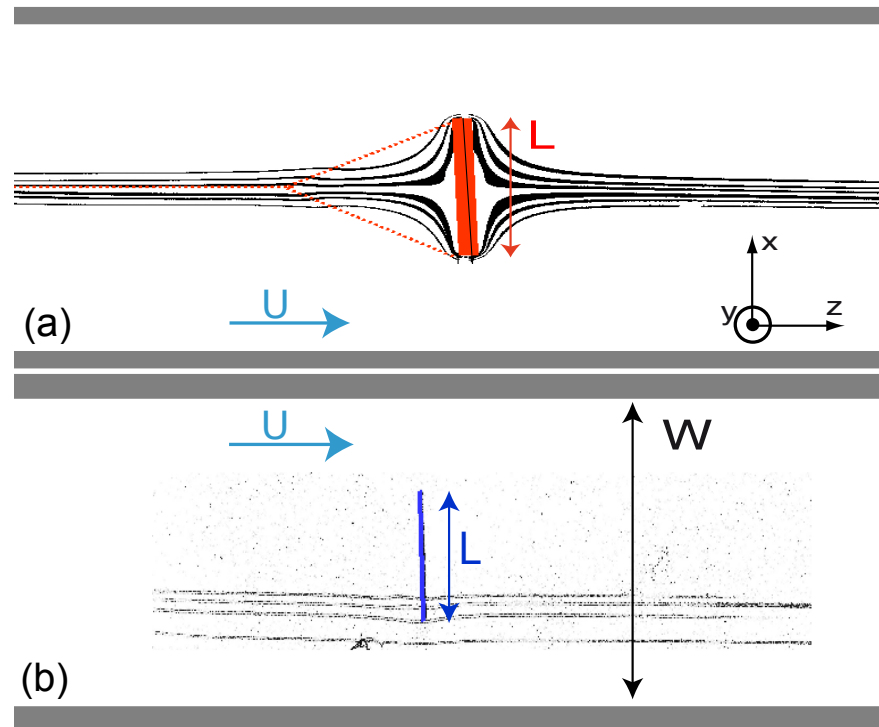


FIGURE 1.12 – Lignes de courant expérimentales pour des cylindres touchant une paroi (en  $y$ ). Il n’y a qu’un injecteur, les figures sont des superpositions d’images. (a) :  $\beta = d/h_0 = 0,83$ , (b) :  $\beta = 0,31$

de Stokes [35]. Le positionnement spontané d’un objet dû à l’inertie dans un écoulement confiné à déjà été étudié dans le cas d’une sphère dans un tube [72, 73].

Nous mesurons donc la force de traînée en régime de Stokes ( $\lambda_{\perp}$ ) en une position (le milieu de la cellule) imposée par une portance d’origine inertielle. Ceci n’est paradoxal qu’en apparence : la traînée est non nulle en régime de Stokes, et la correction due à l’inertie change peu cette valeur pour les nombres de Reynolds faible ( $Re < 5$ ) ; par contre, la portance est nulle en régime de Stokes, et la correction inertielle correspond à la portance totale. De plus, comme les forces de rappels (gravité et rigidité des fils) sont très faibles dans la direction  $y$ , une toute petite portance centre le cylindre. Ces effets inertiels seront étudiés plus en détail dans le chapitre 2.

Pour les cylindres plus courts ( $L < W$ ), le cylindre prend une position quelconque, et c’est d’ailleurs ce qui nous empêche d’obtenir des résultats pour des cylindres trop courts. En effet, à cause de l’effet de court-circuit, les forces (traînée mais aussi portance) sont plus faibles. Pour les cylindres les plus courts, nous avons utilisé des mélanges eau-glycérol de masse volumique à peine plus faible celle des cylindres (en PMMA) pour obtenir une mesure pertinente. Nous avons pu également mesurer la force sur un cylindre touchant une paroi, en plaçant un fil de fer dans des cylindres creux et en attirant ceux-ci contre la paroi grâce à un aimant (l’aimant est placé un peu plus bas que le cylindre afin d’assurer que les fils de suspension soient toujours en tension). Les positions intermédiaires par contre, ne sont pas accessibles expérimentalement.

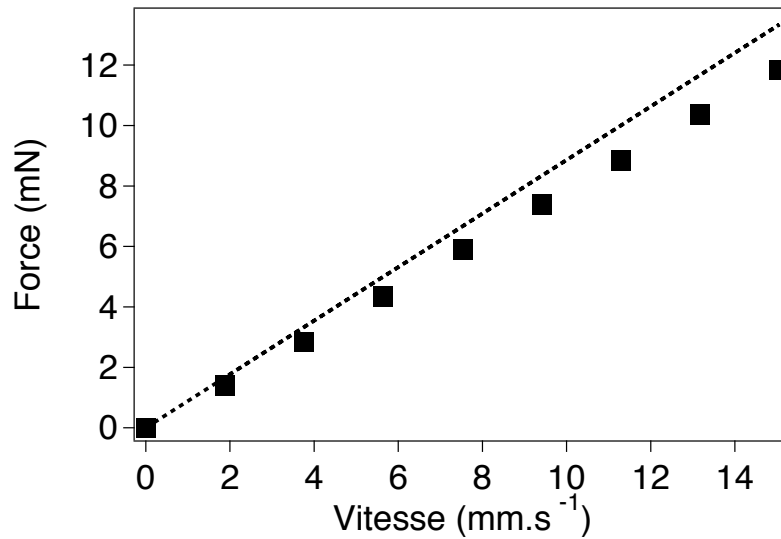


FIGURE 1.13 – Variation de la force sur un cylindre perpendiculaire à l'écoulement à mi-distance des deux plaques en fonction de la vitesse moyenne  $U_m$  pour un mélange eau-glycérol.  $D = 2,96$  mm,  $h_0 = 4,9$  mm,  $\eta = 39,1$  mPa · s et  $0 \leq Re < 2$ . (■) : expériences. Pointillés : résultats numériques 2D.

### 1.5.2 Variation de la force avec la vitesse du fluide

Dans le cas d'un cylindre perpendiculaire à l'écoulement, comme pour un cylindre parallèle à l'écoulement, la traînée est proportionnelle à la vitesse du fluide lorsque le fluide utilisé est un mélange eau-glycérol, tel que le nombre de Reynolds de l'écoulement reste faible (voir Fig. 1.13 ; la légère différence entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques 2D sera discutée en section 1.5.5). À cause du caractère non-parallèle de l'écoulement, les effets inertiels apparaissent plus tôt que pour un cylindre parallèle à l'écoulement : tous les résultats présentés dans cette section ont été obtenus pour  $Re < 5$ , valeur jusqu'à laquelle la variation de la force avec la vitesse du fluide reste linéaire.

### 1.5.3 Champs de vitesse et de pression

La figure 1.14 présente les champs de vitesse et de pression pour un cylindre perpendiculaire à l'écoulement. La vitesse présente bien la symétrie amont-aval, caractéristique des écoulements de Stokes pour une géométrie qui possède cette symétrie, et la pression est bien antisymétrique. La vitesse est très grande dans les zones de faible espacement, à cause de la conservation du débit ; le profil de vitesse est à nouveau un profil de Poiseuille pour des distances suivant  $x$  au cylindre supérieures à quelques  $h_0$ . L'essentiel de la chute de pression est localisée au voisinage du cylindre dans la zone de faible espacement, où les isovalues de la pression sont presque perpendiculaires à la paroi. Ceci confirme les hypothèses du calcul analytique de la section 1.3.2.

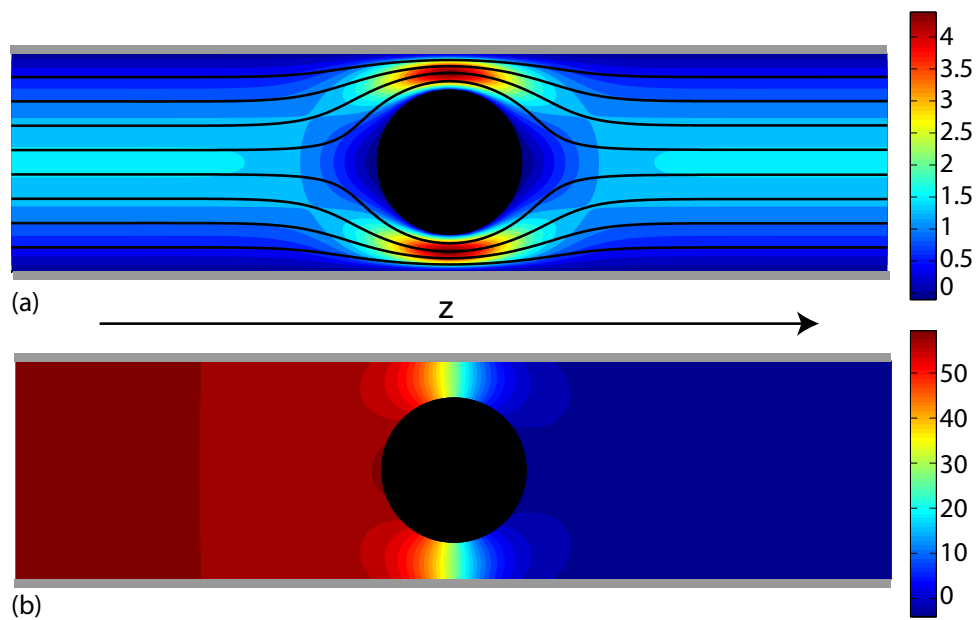


FIGURE 1.14 – Écoulement perpendiculaire au cylindre, pour un cylindre de diamètre  $\beta = 0,66$  centré. (a) : couleurs : vitesse selon  $z$ , lignes continues : lignes de courant. (b) : pression

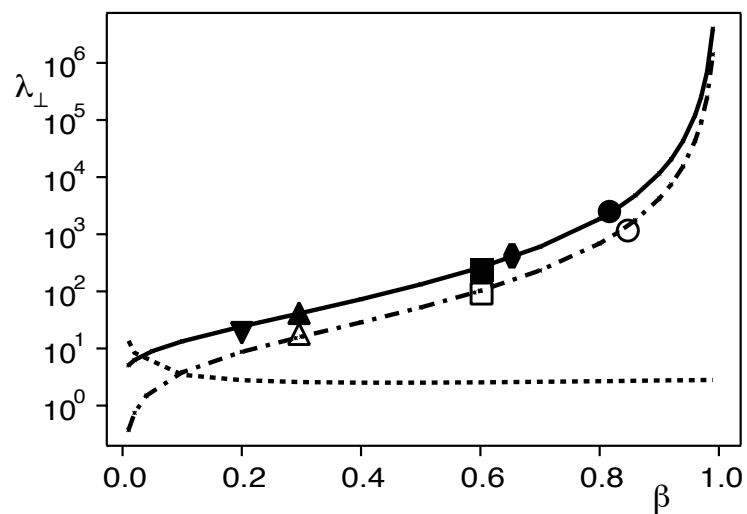


FIGURE 1.15 – Variation de  $\lambda_{\perp}$  avec  $\beta$  pour  $L \approx W$ . Cylindre en contact avec une paroi : les symboles ouverts correspondent aux expériences, la ligne  $(- \cdot -)$  aux résultats numériques 2D. Cylindre à mi-distance des plaques : les symboles pleins correspondent aux expériences, la ligne continue aux simulations numériques 2D (voir Tab. 1.2). Pointillés : rapport des valeurs correspondant à la ligne continue  $(-)$  et à la ligne  $(- \cdot -)$

### 1.5.4 Variation de $\lambda_{\perp}$ avec le diamètre et la position du cylindre dans l'ouverture

Dans les expériences présentées dans cette section, la longueur du cylindre est choisie aussi proche que possible de la largeur du cylindre ( $0,93 < L/W < 1$ ), dans le but de minimiser l'effet de court-circuit (ce point sera discuté plus en détail dans la sous-section suivante). La variation de  $\beta$  avec  $\lambda_{\perp}$  est présentée en figure 1.15, pour des cylindres situés au centre de la cellule ou en contact avec une paroi.

Ici aussi, l'accord entre les valeurs expérimentales et les simulations numériques 2D est satisfaisant (mieux que 10%). Expérimentalement, nous obtenons des valeurs de  $\lambda_{\perp}$  atteignant 2500 alors que (voir Fig. 1.9) la valeur maximale de  $\lambda_{\parallel}$  vaut 18; cette valeur très importante et la divergence de  $\lambda_{\perp}$  lorsque  $\beta \rightarrow 1$  est due à la forte impédance hydraulique de la zone de faible ouverture (voir section 1.3.2 et 1.5.3).

Lorsque l'axe du cylindre est à mi-distance des plaques, l'ouverture hydraulique de chacune des deux zones de faible ouverture vaut  $h_0(1 - \beta)/2$ . Si le cylindre touche une paroi, il n'y a plus qu'une zone de faible ouverture  $h_0(1 - \beta)$  (*i.e.* deux fois celle du cas précédent). Dans l'approximation de lubrification ( $\beta \rightarrow 1$ ), la chute de pression  $\Delta p$  pour un débit  $Q$  donné varie comme la puissance  $-5/2$  de l'ouverture hydraulique (comme dans Éq. (1.21)). Même en prenant en compte le fait que tout l'écoulement passe par un seul canal, cette variation de la pression avec l'ouverture est suffisamment importante pour que la force de traînée diminue lorsque le cylindre touche une paroi. Plus quantitativement, le coefficient  $\lambda_{\perp}$  diminue d'un facteur  $2\sqrt{2}$  par rapport à la valeur au centre. Nous observons bien expérimentalement et numériquement ce rapport entre les forces mesurées dans ces deux configurations, comme le montre la figure 1.15 (tirets).

Le cas  $L \approx W$  est donc modélisé avec succès par une approche 2D. Cette configuration a déjà été étudiée numériquement par [49, 50, 51]; par contre, lorsque le cylindre est plus court que la largeur  $W$  de la cellule, l'écoulement peut être perturbé (voir Fig. 1.12 (a)) et la modélisation 2D ne reproduit plus les données expérimentales. Ces effets 3D sont présentés dans la section suivante.

### 1.5.5 Variation de $\lambda_{\perp}$ avec la longueur du cylindre

Tout d'abord, nous comparons la variation de  $\lambda_{\perp}$  avec  $W$  pour trois diamètres  $d$  différents. Pour tous les cylindres, la version maximale  $\lambda_{\perp}^{max}$  de  $\lambda_{\perp}$  est atteinte lorsque  $L/W$  est proche de 1. Dans ce cas, cette valeur  $\lambda_{\perp}^{max}$  est bien modélisée par des calculs 2D (voir Fig. 1.15); les petites irrégularités sont liées à des incertitudes expérimentales (inhomogénéités de l'ouverture de la cellule ou rugosité par exemple).

Les valeurs expérimentales du rapport  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  en fonction du rapport  $L/W$  (dans la gamme  $0,42 \leq L/W \leq 0,99$ ) sont présentées en figure 1.16. Lorsque  $L/W$  diminue en partant de 1, le rapport  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  devient nettement plus petit que 1; cette diminution est particulièrement importante lorsque  $\beta$  est grand : par exemple, pour  $\beta = 0,83$ ,  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  décroît de 60% pour une réduction de  $L/W$  de seulement 5%. Cette forte variation est due à la déviation partielle de l'écoulement vers l'espace entre l'extrémité du cylindre et la paroi latérale de la cellule (voir Fig. 1.12), ce qui diminue la vitesse entre le cylindre et les plans  $y = \pm h_0/2$  et donc la force de traînée. Comme le montre la figure 1.16, cet effet de court-circuit est particulièrement important si cet espacement est important (faibles valeurs de  $L/W$ ) et si le passage entre le cylindre et les plans  $y = \pm h_0/2$  est étroit ( $\beta \rightarrow 1$ , ce qui correspond à des faibles perméabilités). Si le diamètre normalisé du cylindre n'est pas trop

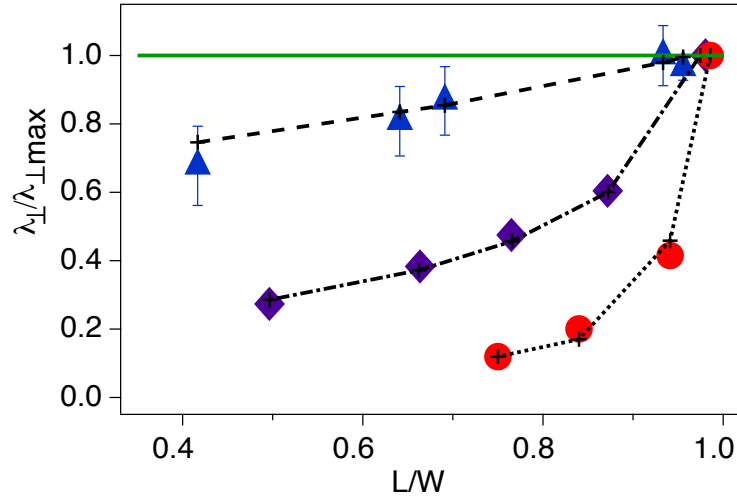


FIGURE 1.16 – Variation du coefficient de traînée normalisé  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  en fonction de la longueur adimensionnée  $L/W$ , pour des cylindres de différents diamètres situés au centre de la cellule. ( $\blacktriangle$ ), ( $\blacklozenge$ ) and ( $\bullet$ ) : expériences réalisées respectivement pour  $\beta = 0,31$ ,  $\beta = 0,65$  et  $\beta = 0,83$  (voir Tab. 1.2). Lignes (—), (— · —) et (· · ·) : résultats numériques 3D obtenus respectivement pour  $\beta = 0,31$ ,  $\beta = 0,65$  et  $\beta = 0,83$ .

grand ( $\beta < 0,3$  dans nos expériences), la valeur 2D donne un ordre de grandeur correct. Ces observations sont cohérentes avec la visualisation des lignes de courant : si le diamètre normalisé du cylindre est grand (voir Fig. 1.12 (a)), l'écoulement est nettement dévié, alors qu'il l'est très peu si le diamètre normalisé du cylindre est plus faible (voir Fig. 1.12 (b)).

Pour prévoir numériquement la variation de  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$ , il est nécessaire de résoudre l'équation de Stokes 3D : les trois composantes du champ de vitesse  $\mathbf{V}(x, y, z)$  doivent être déterminées, et pas seulement  $V_y(y, z)$  and  $V_z(y, z)$  comme dans le cas 2D. Ces calculs ont été réalisés avec FreeFem3D (voir section 1.3.2). Comme test de validation, nous avons considéré tout d'abord le cas où la longueur du cylindre est égale à la largeur de la cellule ( $L = W$ ). Si, en plus, nous choisissons une condition de glissement sur les parois latérales, les simulations 3D et 2D sont équivalentes et les résultats doivent être similaires. En fait, les simulations 3D prévoient des valeurs de  $\lambda_{\perp}$  supérieures de 20% au plus : cette différence est sans doute due à des problèmes numériques (types d'élément finis, taille du maillage). Par contre, les variations relatives de forces semblent correctes.

Ces simulations 3D ont été réalisées pour différentes valeurs de  $L/W$  et pour trois diamètres adimensionnés  $\beta$  différents, qui correspondent aux valeurs utilisées lors des expériences. Les différentes lignes de la figure 1.16 relient les points correspondant aux rapports  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  obtenues grâce à ces simulations (les valeurs de  $\lambda_{\perp}^{max}$  sont ceux obtenues dans la simulation pour  $L = W$ ). L'accord entre les valeurs expérimentales et numériques de  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  est correct. Ceci confirme que, dans cette géométrie, les variations de la traînée avec  $L/W$  reflètent le caractère tridimensionnel important de l'écoulement.

La variation de  $\lambda_{\perp}$  avec la position du cylindre dans l'ouverture a également été étudiée pour les deux positions accessibles expérimentalement : cylindre au centre et cylindre touchant une paroi. Comme cela a été montré dans la section 1.5.4, la force de traînée doit être plus faible lorsque le cylindre est en contact avec la paroi que lorsqu'il est à mi-distance de celles-ci. Les variations expérimentales du rapport  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  en fonction de  $L/W$  sont présentées pour les deux configurations en figure 1.17, et ceci pour deux valeurs

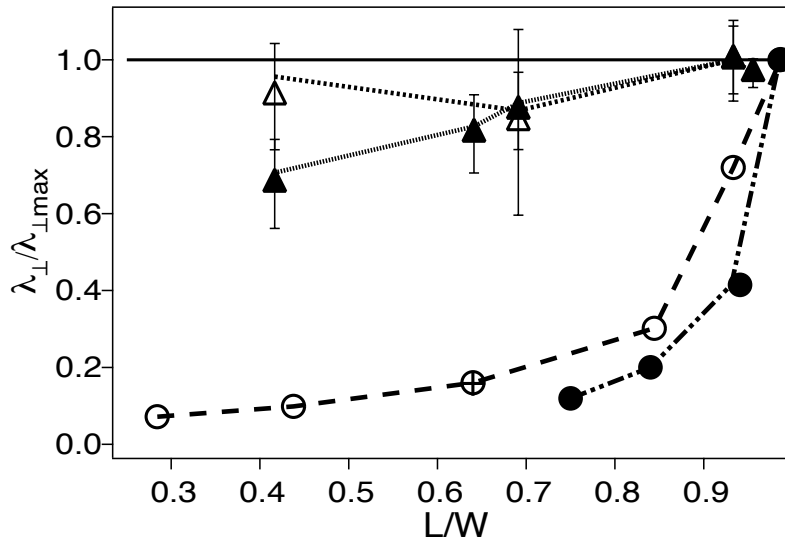


FIGURE 1.17 – Variation du coefficient de traînée normalisé  $\lambda_{\perp}/\lambda_{\perp}^{max}$  en fonction de la longueur normalisée  $L/W$  pour deux positions du cylindre : à mi-distance des plaques (symboles pleins) ou touchant une paroi (symboles ouverts). ( $\triangle, \blacktriangle$ ) et ( $\circ, \bullet$ ) correspondent respectivement à  $\beta = 0,31$  et  $\beta = 0,83$  (voir Tab. 1.2). Les lignes servent à guider l’œil.

du diamètre  $\beta$ . Les barres d’erreur sont essentiellement dues au fait que pour les plus petits cylindres, il faut soustraire la contribution des petits fils de suspension, dont la position n’est pas exactement connue ; la contribution de la partie non parallèle à l’écoulement est approximée en combinant linéairement les valeurs de  $\lambda_{\parallel}$  et  $\lambda_{\perp}$  pour les petits fils (ce qui ne serait pas possible pour de très gros fils qui bloqueraient eux aussi l’écoulement et subirait une force hydrodynamique non proportionnelle à la longueur du cylindre). La diminution du coefficient  $\lambda_{\perp}$  avec  $L$  est plus prononcée dans le cas où le cylindre se trouve au centre des deux plaques. Cela est dû au fait que le blocage est plus important pour un cylindre situé au centre (perméabilité plus faible, voir section 1.3.2), et que l’écoulement est donc plus dévié.

Nous avons également vérifié l’influence de la viscosité en comparant les résultats de deux expériences où seule la viscosité varie :  $\eta = 50 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  pour le point (+) de la figure 1.17 et  $\eta = 30 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  pour le point (o) correspondant de la même figure. Les points coïncident, ce qui confirme que la traînée est bien proportionnelle à la viscosité.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des expériences et des calculs numériques déterminant la force de traînée sur un cylindre rigide confiné entre deux plaques, en régime de Stokes. Deux cas limites ont été étudiés : le cas où le cylindre est parallèle à l’écoulement, et celui où il est perpendiculaire. Dans ces deux configurations, la force de traînée est proportionnelle à la vitesse de l’écoulement et à la viscosité, ce qui est la loi d’échelle attendue dans le cas d’un écoulement de Stokes.

Par contre, la variation en fonction du coefficient de proportionnalité  $\lambda$  diffère nettement entre ces deux configurations. Ces différences proviennent du fait que, lorsque le cylindre est parallèle à l’écoulement, il ne modifie que peu celui-ci ; au contraire, un cylindre perpendiculaire à l’écoulement peut provoquer un blocage et le modifier notablement.

Dans le cas parallèle,  $\lambda_{\parallel}$  augmente avec  $\beta = D/h_0$  (diamètre adimensionné du cylindre, qui caractérise le confinement) mais ne diverge pas lorsque  $\beta = 1$ ;  $\lambda_{\perp}$  augmente nettement plus vite avec  $\beta$  et diverge pour  $\beta = 1$  (à cause du blocage de l'écoulement) lorsque la longueur  $L$  du cylindre est proche de la largeur  $W$  de la cellule. Les calculs numériques 2D dans les plans perpendiculaires (pour  $\lambda_{\parallel}$ ) et parallèle (pour  $\lambda_{\perp}$  et  $L \simeq W$ ) à l'écoulement moyen reproduisent quantitativement les résultats expérimentaux. Dans la configuration où le cylindre est perpendiculaire à l'écoulement, un modèle analytique approché basé sur l'approximation de lubrification donne une estimation correcte de  $\lambda_{\perp}$  (toujours pour  $L \simeq W$ ) dès que le confinement est suffisant (*i.e.* pour  $\beta > 0.2$ ).

Dans la configuration perpendiculaire, sauf lorsque la longueur  $L$  du cylindre est très proche de la largeur de la cellule  $W$  l'écoulement contourne le cylindre (à cause de la zone de faible espacement, la zone du cylindre est une zone de faible perméabilité); ceci réduit la vitesse du fluide près du cylindre; cet effet est particulièrement important lorsque le confinement est fort ( $\beta \simeq 1$ ) et que le cylindre est à mi-distance des parois. Il en résulte une forte baisse du coefficient  $\lambda_{\perp}$ . Des simulations numériques 3D sont nécessaires pour prévoir quantitativement cet effet.

Ces expériences ont également mis en évidence l'existence d'une portance dans le cas des cylindres perpendiculaires à l'écoulement. Dans nos expériences, cette force est suffisante pour maintenir le cylindre à mi-distance des plaques pour des nombres de Reynolds aussi petits que 0,1. Étant donné la symétrie amont-aval de la géométrie, la portance est nulle en régime de Stokes : la portance est donc d'origine inertielle. Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est plus élevé, l'effet de la portance n'est plus forcément de maintenir le cylindre à mi-distance des plaques; ce cas sera étudié dans le chapitre suivant.





# Chapitre 2

## Oscillation d'un cylindre confiné entre deux plaques

### 2.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, la position d'un cylindre placé parallèlement à l'écoulement est indifférente, et elle est fixée par la position du point de suspension. Au contraire, si le cylindre est perpendiculaire à l'écoulement, nous avons vu au chapitre 1 qu'il se place à mi-distance entre les plaques, dans la gamme de nombre de Reynolds<sup>1</sup> étudiée ( $0, 1 < Re < 5$ ). Dans ce cas, la position centrée est stable et le cylindre reste immobile une fois qu'il l'a atteinte. Par contre, pour des nombres de Reynolds plus élevés mais néanmoins modérés ( $Re \sim 20$ ), nous verrons que le cylindre oscille spontanément dans l'ouverture, même si le débit de la pompe est constant. Le cylindre oscille de manière très régulière dans la direction normale aux plaques, tout en restant parallèle à celles-ci. Dans ce chapitre, nous cherchons à déterminer quel sont les ingrédients essentiels de l'instabilité, et à comprendre qualitativement ses mécanismes.

L'étude de l'oscillation d'un cylindre soumis à un écoulement a fait l'objet de nombreux travaux [74, 75, 76, 77, 78]. Le cas le plus classique résulte de l'instabilité de Bénard-Von Kármán, qui est l'instabilité de l'écoulement derrière un cylindre fixe [79, 35]. Des tourbillons sont ainsi émis derrière un cylindre fixe, placé dans un écoulement infini, au-delà d'un nombre de Reynolds seuil  $Re_D = 47$  [80, 81], avec la définition  $Re_D = UD/\nu$ , où  $U$  est la vitesse (uniforme) loin du cylindre,  $D$  le diamètre de celui-ci et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Cette transition vers un régime oscillatoire n'est en fait qu'une de celles observées dans cette géométrie : l'écoulement est symétrique pour  $Re_D = 0$ , puis les recirculations apparaissent pour  $Re_D = 5$ , une région d'instabilité absolue apparaît à  $Re_D = 25$  [82], et enfin vers 180 l'écoulement devient 3D [83]. Toujours dans la modélisation la plus classique [84, 75], le cylindre est supposé soumis à une force de rappel vers une position fixe et possède une masse non nulle. Le cylindre possède ainsi une fréquence mécanique propre. Les vibrations sont alors dues à la proximité de la fréquence mécanique du cylindre et de la fréquence de l'émission des tourbillons. La situation classique correspond donc à un cylindre non-confiné, soumis à une force de rappel, de masse non-nulle, soumis à un écoulement à un nombre de Reynolds supérieur à  $Re_D = 47$ . Remarquons que même avec ces hypothèses, le comportement observé peut être nettement plus riche qu'une simple résonance : l'amplitude de l'oscillation peut être notable sur une large plage de  $Re_D$  [75, 85, 86, 87] (en particulier

---

1. le nombre de Reynolds  $Re$  est défini comme au chapitre 1 par  $Re = U_m h_0 / \nu$ , où  $U_m$  est la vitesse moyenne dans la cellule,  $h_0$  la distance entre les plaques et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

si la masse du cylindre est faible), l'amplitude peut être discontinue pour certaines valeurs de  $Re_D$  [88], et présenter de l'hystérésis [75].

L'instabilité présentée dans ce chapitre diffère tout d'abord de ce cas classique par le caractère confiné du cylindre. D'autre part, comme nous le verrons en section 2.2.4, la gravité est négligeable, et le cylindre n'est soumis à aucune force de rappel extérieure (le dispositif n'est pas un simple pendule). Enfin, nous avons vérifié expérimentalement (voir section 2.2.4) que l'instabilité étudiée apparaît pour un nombre de Reynolds nettement inférieur au seuil d'émission de tourbillons pour un cylindre fixe. À notre connaissance, aucune étude détaillée n'a été menée concernant l'oscillation d'un cylindre qui possède simultanément la propriété de ne pas subir de force de rappel extérieure, d'être confiné et d'être placé dans un écoulement de nombre de Reynolds inférieur au seuil d'émission des tourbillons pour un cylindre fixe. Par contre, l'effet de chacun de ces trois points a été étudié séparément, comme cela est détaillé ci-dessous.

En ce qui concerne la nécessité de la présence d'une force de rappel pour observer l'oscillation, une étude numérique récente [89] a montré qu'un cylindre non-confiné à  $Re_D = 100$  oscillait même en l'absence de force de rappel, de masse et de dissipation liée au cylindre. Une étude expérimentale [90] a montré qu'en l'absence de force de rappel, des cylindres de densités inférieures à une densité critique oscillent spontanément. De même, la trajectoire d'un cylindre suffisamment léger en ascension dans un fluide au repos n'est pas rectiligne [91].

Des oscillations du cylindre ont été observées [92, 93] même si le cylindre est confiné entre deux plaques. Cependant, ces travaux considèrent uniquement le cas d'un cylindre soumis à une force de rappel et des nombres de Reynolds supérieurs au seuil d'émission des tourbillons  $Re_D$ . Plus récemment, une étude a pris en compte l'effet du confinement et l'effet de l'absence de force de rappel [94] pour un cylindre (de forme carrée) libre d'osciller perpendiculairement à un écoulement confiné entre deux plaques. Le cylindre oscille de manière sinusoïdale au-dessus d'une masse critique, et de manière irrégulière en-dessous. Certaines simulations sont faites pour des nombres de Reynolds inférieur au seuil (voir [95]), même si cet aspect n'est pas discuté dans l'article.

La quasi-totalité des études se restreignent à des nombres de Reynolds supérieurs à  $Re_D = 47$ , mais quelques études se sont éloignées de la configuration classique uniquement en diminuant le nombre de Reynolds. Des oscillations pour des nombres de Reynolds de l'ordre de  $Re_D = 20$  ont été ainsi prédites numériquement pour des cylindres non-confinés de masse non-nulle soumis à une force de rappel extérieure [96, 97].

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire en section 2.2 les particularités du dispositif expérimental utilisé par rapport à celui du chapitre 1. Nous présentons ensuite les résultats expérimentaux, en montrant notamment la régularité des oscillations et les variations de l'amplitude et de la fréquence avec le nombre de Reynolds. Le cas d'un cylindre fixé est discuté. Nous trouvons que le cylindre oscille pour un nombre de Reynolds inférieur au nombre de Reynolds d'émission des tourbillons de Bénard-Von Kármán : les oscillations mettent en jeu un couplage fort entre le fluide et le cylindre. Afin de comprendre les mécanismes de l'instabilité, nous effectuons des simulations numériques. La section 2.3 détaille la modélisation et les résultats numériques pour les oscillations libres, qui sont comparés aux résultats expérimentaux. Comme les oscillations sont sinusoïdales, nous cherchons en section 2.4 à écrire que la position du cylindre est solution d'un système dynamique faiblement non-linéaire. Pour cela, nous forçons numériquement l'oscillation du cylindre, à des amplitudes et à des fréquences différentes de celles des oscillations libres, et mesurons la force hydrodynamique totale s'exerçant sur le cylindre. Ces simulations montrent que la

position du cylindre est solution d'une équation de Van der Pol. L'origine hydrodynamique des coefficients de cette équation sont discutés en section 2.5.

## 2.2 Dispositif et résultats expérimentaux

### 2.2.1 Dispositif expérimental

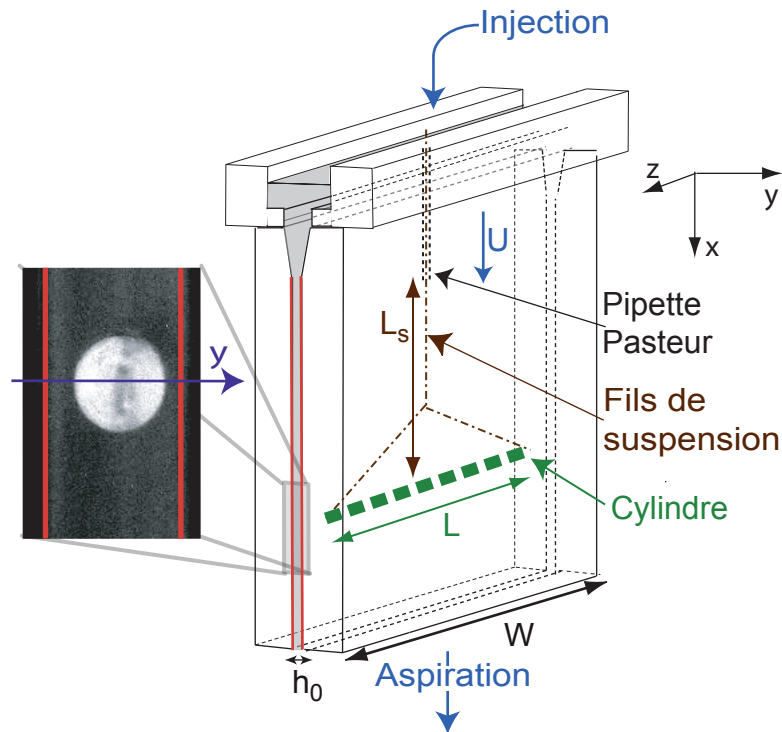


FIGURE 2.1 – Dispositif expérimental utilisé pour étudier l'oscillation du cylindre. La désignation des axes  $x$  et  $z$  a été modifiée par rapport au chapitre 1.

Le dispositif expérimental est similaire à celui qui a été utilisé pour la mesure des forces de traînée s'exerçant sur le cylindre (voir Fig. 2.1).

Contrairement au chapitre 1, nous nous restreignons, pour simplifier l'étude, au cas où le problème est le plus proche possible du cas 2D, c'est-à-dire que nous choisissons la longueur  $L$  du cylindre approximativement égale à la largeur  $W$  de la cellule ( $L/W > 0,98$ ). La partie supérieure des fils de suspension est maintenue dans une pipette Pasteur dont l'extrémité est située plus bas que la partie en  $Y$ . La longueur des fils de suspension est  $L_s = 150$  mm. La partie du fil contenu dans la pipette Pasteur ne peut presque pas se déplacer latéralement.

Comme nous ne cherchons pas à mesurer la force de traînée, la balance n'est plus utilisée. La quantité mesurée est la position du cylindre au cours du temps. Nous utilisons une caméra Pixelink contrôlée par le logiciel Streampix, afin de garantir un intervalle de temps constant entre deux images (environ 22 images/s). La position  $G_y$  du centre du cylindre est déduite des images du film par corrélation entre l'image expérimentale et une image virtuelle d'un cercle. Cette méthode de corrélation d'images mesure les déplacements avec une précision sub-pixel (comme dans la méthode développée au chapitre 3). Par contre, la position absolue

du centre et des parois n'est connue qu'avec une précision de l'ordre du pixel (les mesures sont compatibles avec une oscillation symétrique par rapport au centre).

Afin d'augmenter le nombre de Reynolds par rapport au chapitre 1, les fluides utilisés sont moins visqueux. Deux fluides de même masse volumique mais de viscosités légèrement différentes ont été utilisés : l'eau et une solution aqueuse de natrosol (concentration environ  $1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ). Une mesure effectuée en utilisant un viscosimètre Low Shear a montré que ce fluide est newtonien dans la gamme de taux de cisaillement accessibles ( $1 - 100 \text{ s}^{-1}$ ). Du colorant (nigrosine  $0,1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ) est ajouté pour améliorer la visualisation. La vitesse de rotation de la pompe est de 6 tour/s (pour un débit de  $100 \text{ mL/s}$ ), et l'engrenage qui met en mouvement le fluide comporte environ 20 dents : la fréquence de modulation du débit est nettement plus grande que celle des oscillations (voir Fig. 2.4b). La pompe impose donc un écoulement en entrée qui peut être considéré comme constant en temps. Pour éviter l'influence de la gravité (pendule), nous choisissons des cylindres en PMMA, dont la masse volumique ( $1190 \text{ kg/m}^3$ ) est proche de celle de l'eau. Le diamètre des cylindres en PMMA vaut  $3,2 \text{ mm}$  dans la plupart des expériences (soit  $\beta = 0,66$ ).

### 2.2.2 Oscillation du cylindre

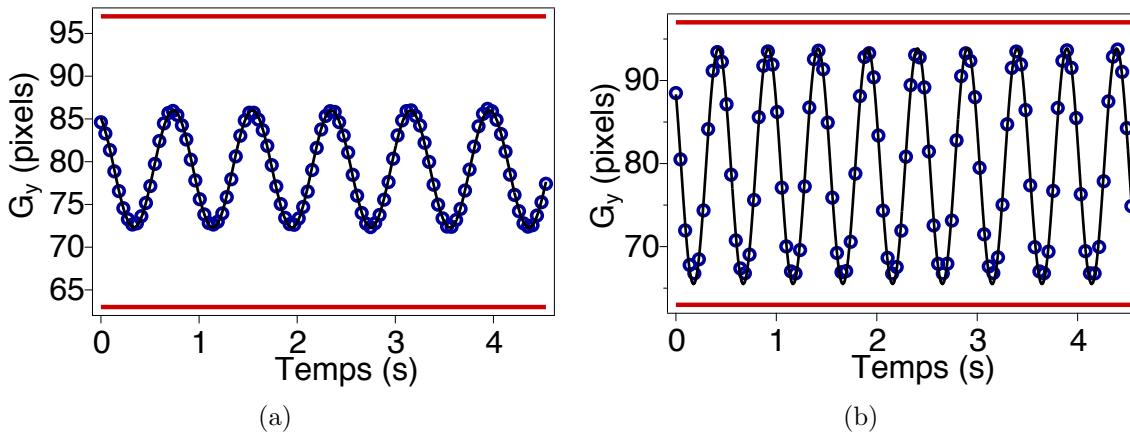


FIGURE 2.2 – Position du centre du cylindre  $G_y$  au cours du temps ( $\beta = 0,66$ ). ( $\circ$ ) : points expérimentaux, ligne noire : ajustement sinusoïdal, droites rouges : position du centre du cylindre lorsque ce dernier touche une plaque. (a) :  $Re = 25$ , (b) :  $Re = 50$ .

Expérimentalement, un cylindre de diamètre  $3,2 \text{ mm}$  placé dans la configuration de la figure 2.1 se place au centre de la cellule, puis y reste immobile, tant que le nombre de Reynolds est inférieur à 20 (environ). Au-delà de ce seuil, le cylindre se met à osciller spontanément. L'utilisation de deux caméras face à face de part et d'autre des côtés de la cellule nous a permis de montrer que l'oscillation est perpendiculaire aux parois (avec l'axe du cylindre parallèle aux parois), ce qui est confirmé par la visualisation directe (à l'œil nu) de l'expérience.

Les expériences sont sensibles aux frottements parasites, notamment avec les parois latérales (de normale  $z$ ), qui peuvent modifier le seuil des oscillations. Un mauvais centrage de la pipette modifie également les résultats. Dans tous les cas, la valeur de la fréquence est nettement plus robuste que l'amplitude. Lorsque le débit est trop important, le cylindre oscille

également dans la direction de l'écoulement (selon  $x$ ), l'oscillation peut cesser d'être parallèle aux plaques. Ces phénomènes sont notamment dus à la flexibilité des fils de suspensions, et limitent la gamme de débit (et donc de  $Re$ ) étudiés.

La figure 2.2, qui donne la variation de la position du centre du cylindre en fonction du temps, montre que les oscillations obtenues sont à la fois très régulières et très stables en temps. Les points expérimentaux sont bien ajustés par une sinusoïde :

$$G_y(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi), \quad (2.1)$$

ce qui permet de définir l'amplitude  $A$  et la fréquence  $f$  des oscillations (la phase  $\varphi$  est sans signification physique ici). Même nettement au-dessus du nombre de Reynolds seuil (voir Fig. 2.2b), cet ajustement reste pertinent (alors que souvent les anharmonicités deviennent importantes loin du seuil d'une instabilité).

### 2.2.3 Amplitude et fréquence de l'oscillation

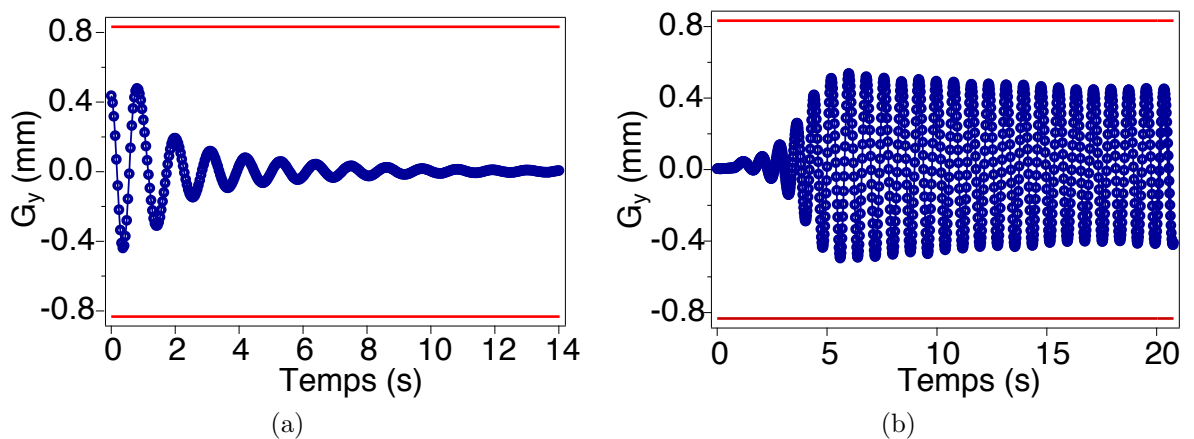


FIGURE 2.3 – Position du centre du cylindre  $G_y$  au cours du temps ( $\beta = 0,66$ ). ( $\circ$ ) : points expérimentaux, ligne bleue : guide pour l'œil, droites rouges : position du centre du cylindre lorsque ce dernier touche une plaque. (a) : passage  $Re = 27$  à  $Re = 17$ , (b) : passage  $Re = 17$  à  $Re = 27$ .

Avant d'étudier les variations de l'amplitude et de la fréquence avec le nombre de Reynolds, nous vérifions que ces grandeurs sont bien définies et que l'oscillation ne présente pas d'hystérésis, en étudiant la réponse du système à un changement de débit. Le nombre de Reynolds est tout d'abord augmenté progressivement jusqu'à  $Re = 27$  pour obtenir des oscillations régulières. Lorsque le nombre de Reynolds est abaissé soudainement pour atteindre une valeur inférieure à la valeur critique ( $Re = 17$ ), le cylindre continue à osciller, mais l'amplitude diminue progressivement jusqu'à une valeur nulle (voir Fig. 2.3a). En ré-augmentant soudainement le débit pour obtenir un nombre de Reynolds  $Re = 27$ , le cylindre recommence à osciller avec une amplitude qui croît jusqu'à saturer à la même valeur que lorsque l'augmentation du débit était progressive (voir Fig. 2.3b, la légère diminution de l'amplitude après  $t = 5$  s n'est pas interprétée). En comparant la valeur de l'amplitude et de la fréquence pour un débit donné, lorsque le débit précédent est inférieur ou supérieur, nous avons également observé qu'il n'y a pas d'hystérésis sur la valeur de la fréquence ou de

l'amplitude. La bifurcation entre un cylindre stable à mi-distance des plaques et un cylindre qui oscille est donc supercritique

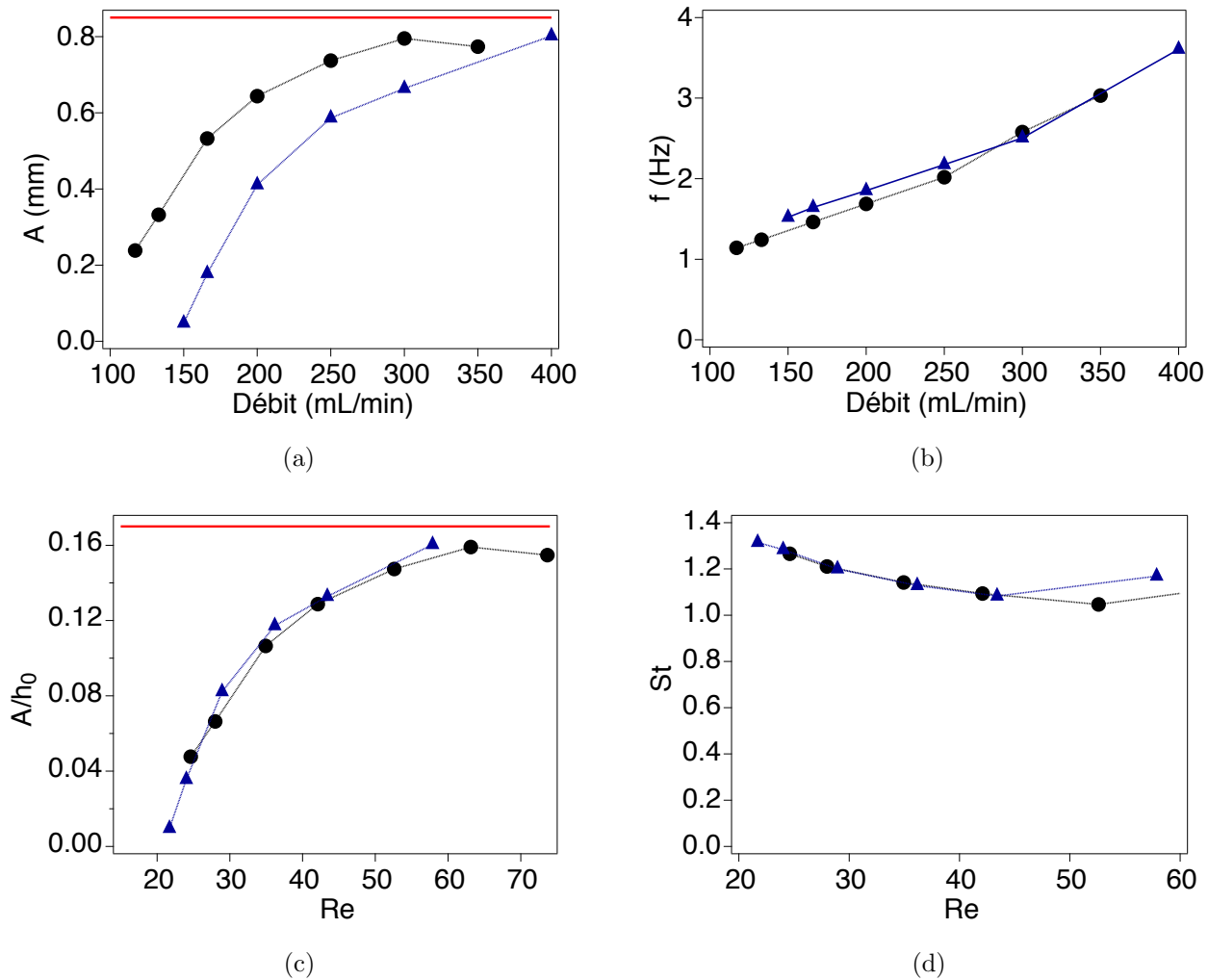


FIGURE 2.4 – Oscillations pour un cylindre de diamètre adimensionné  $\beta = D/h_0 = 0,66$  et deux fluides : (●) : eau ( $\eta = 0,88 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ), (▲) : solution aqueuse de natrosol ( $\eta = 1,28 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ). (a) : amplitude des oscillations en fonction du débit. Droite rouge : amplitude maximale (le cylindre touche les plaques). (b) : fréquence des oscillations en fonction du débit. (c) et (d) : mêmes données après adimensionnement.

Nous nous intéressons maintenant aux variations de l'amplitude  $A$  et la fréquence  $f$ , qui sont bien des grandeurs bien définies, avec les paramètres expérimentaux, à savoir le débit, la viscosité du fluide et le diamètre du cylindre.

Comme le montrent les figures 2.4a et 2.4b, la fréquence et l'amplitude de l'oscillation dépendent du débit. L'amplitude augmente avec le débit, et sature à cause de la présence des plaques. Le seuil en débit est plus élevé pour un fluide plus visqueux. La fréquence augmente avec le débit. Lorsque nous adimensionnons l'amplitude par la distance entre les plaques  $h_0$ , la fréquence en définissant le nombre de Strouhal  $St = fh_0/U_m$  et le débit en utilisant le nombre de Reynolds, les courbes obtenues se superposent. Cela confirme que l'adimensionnement choisi est pertinent et que la gravité n'intervient pas (si la gravité était importante, le nombre de Strouhal dépendrait aussi de  $gh_0/(U_m)^2$  et les courbes

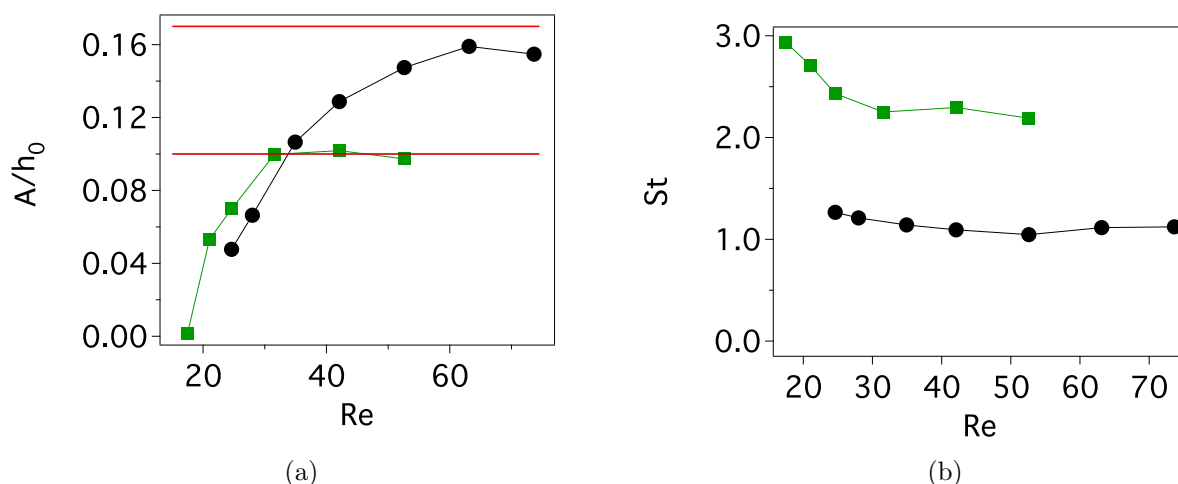


FIGURE 2.5 – Variations en fonction du nombre de Reynolds de l'amplitude adimensionnée et du nombre de Strouhal pour deux diamètres. (●) :  $\beta = 0,66$ , (■) :  $\beta = 0,81$ . (a) : amplitude adimensionnée, (b) : nombre de Strouhal.

ne se superposeraient pas). Le nombre de Strouhal diminue faiblement avec le nombre de Reynolds.

L'amplitude maximale est plus faible pour un cylindre de plus grand diamètre (voir Fig. 2.5). Cet effet est simplement dû au fait que le décalage  $G_y$  pour lequel le cylindre touche une paroi est plus faible. La fréquence (Strouhal) augmente avec le diamètre du cylindre

## 2.2.4 Test des interprétations les plus simples

Le but de cette section est de discuter les interprétations possibles les plus simples des oscillations. Nous montrons tout d'abord que la gravité n'est pas essentielle<sup>2</sup>, et que l'instabilité n'est pas due à l'émission de tourbillons de Bénard-Von Kármán.

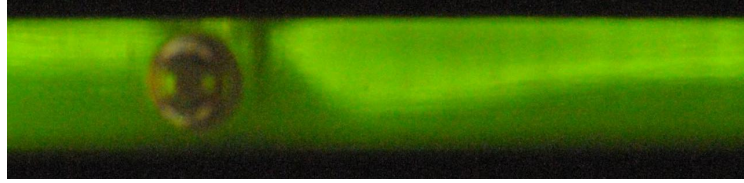
### 2.2.4.1 Influence de la gravité

Pour tester l'effet de la gravité, la longueur des fils de suspension  $L_s$  est modifiée de sa valeur par défaut 150 mm à la valeur 65 mm ; nous observons que la fréquence change peu (moins de 5%) pour les débits inférieurs à 400 mL/s (gamme d'intérêt, voir Fig. 2.4b). L'écart relatif sur l'amplitude est comparable, sauf près du seuil, où l'amplitude est très faible. L'absence d'effet du changement de la longueur des fils de suspension montre que la gravité n'intervient pas ici, contrairement au cas d'un pendule simple dont la fréquence dépend de la longueur du fil de suspension.

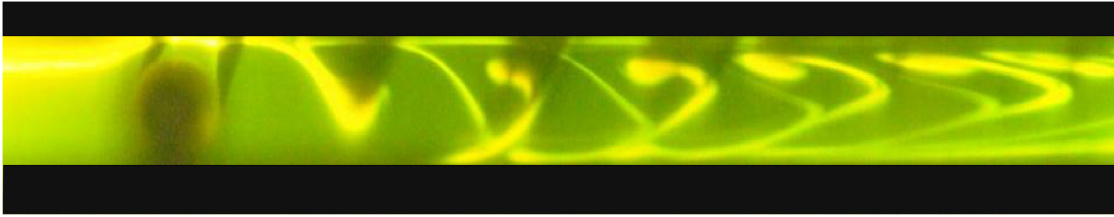
### 2.2.4.2 Une instabilité de Bénard-Von Kármán ?

Le seuil d'émission de tourbillons derrière un cylindre fixé a été étudié en modifiant légèrement le dispositif expérimental pour encastrer le cylindre. Pour visualiser l'écoulement, nous injectons un colorant fluorescent d'un côté (selon  $y$ ) en amont du cylindre. Le dispositif

<sup>2</sup>. comme la gravité est une force conservative, elle ne peut pas de toutes façons expliquer seule l'instabilité.



(a)



(b)

FIGURE 2.6 – Visualisation de l'écoulement par injection de colorant, pour des cylindres fixé et libre ( $\beta = 0,66$ ). L'écoulement va de la gauche vers la droite. (a) : cylindre maintenu fixe,  $Re = 60$ . (b) : cylindre libre d'osciller dans la direction normale aux plaques,  $Re = 50$ .

est éclairé par une nappe laser perpendiculaire au cylindre, qui permet de visualiser l'écoulement dans un plan perpendiculaire au cylindre. Nous observons que le seuil de l'émission de tourbillons derrière le cylindre vaut  $Re = 120 \pm 10$ . La figure 2.6a montre une photo prise pour un cylindre fixe : l'écoulement ne présente pas de structures, au contraire de ce qui est observé avec un cylindre attachés à des fils de suspension (voir Fig. 2.6b). Nous retrouvons bien le décalage du nombre de Reynolds critique vers les hautes valeurs lorsque le cylindre est confiné entre deux plaques [98, 52, 54, 58]. Remarquons que cette différence n'est pas uniquement due à la différence entre les définitions du nombre de Reynolds entre les situations confinées et non-confinées [52].

## 2.3 Présentation des simulations numériques

Comme l'a montré la section précédente, les oscillations ne peuvent pas être expliquées de manière classique, par l'émission de tourbillons ou un effet de type pendule. Pour comprendre les mécanismes de l'instabilité, il faut caractériser les forces hydrodynamiques qui s'exercent sur le cylindre. Pour connaître ces forces, nous avons choisi de simuler numériquement l'oscillation du cylindre. Dans cette section, nous présentons les hypothèses physiques des simulations numériques, nous validons les simulations numériques en comparant les résultats numériques et expérimentaux, et nous donnons des exemples de résultats obtenus pour les champs de vitesse et de pression. L'utilisation des simulations numériques pour modéliser la dynamique du cylindre est l'objet de la section 2.4.

### 2.3.1 Hypothèses des simulations numériques

Nous avons choisi de restreindre les expériences au cas  $L \approx W$ . Dans le chapitre 1, nous avons montré que la traînée dans cette configuration est bien modélisée par une approche



2D (numérique ou analytique). Comme l'oscillation du cylindre est parallèle aux plaques, nous continuons d'utiliser une modélisation 2D dans le cas où le cylindre oscille.

Le fluide est modélisé par l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'incompressibilité. À l'interface avec les parois latérales et le cylindre, nous choisissons la condition aux limites classiques de non-glissement. En particulier, la condition de non-glissement à la surface du cylindre représente la condition cinématique de couplage qu'impose le cylindre sur le fluide. La longueur de la cellule en amont du cylindre vaut environ  $20h_0$  : pour les nombres de Reynolds considérés ( $Re < 60$ ) le profil de Poiseuille est effectivement établi en amont du cylindre [62]. Dans les simulations numériques, nous imposons donc un profil de Poiseuille comme condition aux limites en entrée. En sortie, nous choisissons une condition de sortie libre dont l'influence sur l'écoulement situé en amont de la sortie est faible.

Le cylindre est modélisé comme un solide rigide. Expérimentalement, nous n'observons pas de rotation du cylindre, probablement à cause de la rigidité non nulle des fils de suspension. Numériquement, nous empêchons donc la rotation du cylindre.

À cause des fils de suspension, le cylindre ne peut se déplacer que sur un arc de cercle. Comme le rayon de ce cercle ( $L_s$ ) est grand par rapport à l'écartement entre les plaques ( $h_0$ ), cette condition revient presque à imposer que le déplacement du cylindre soit nul selon  $x$  et libre selon  $y$  ; numériquement nous imposons cette dernière condition.

Le déplacement du cylindre est donné par la deuxième loi de Newton, qui relie l'accélération du cylindre aux forces s'exerçant sur celui-ci, notamment la force hydrodynamique. Ceci constitue la condition dynamique de couplage qu'impose le fluide sur le cylindre.

Les équations traduisant cette modélisation ainsi que les détails de la méthode numérique sont présentés en annexe B. Les équations et les résultats numériques sont adimensionnés en utilisant la distance entre les plaques  $h_0$ , la vitesse moyenne  $U_m$  et la masse volumique du fluide  $\rho_f$  : à partir de maintenant, le diamètre adimensionné  $\beta = D/h_0$  sera simplement noté  $D$ , par exemple. Sauf mention contraire, la gravité n'est pas prise en compte.

### 2.3.2 Validation : comparaison avec les résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous présentons et commentons des résultats numériques sur l'amplitude et la fréquence du cylindre, et nous les comparons aux résultats expérimentaux afin de valider la méthode numérique.

L'instabilité est observée dans les simulations numériques : si le nombre de Reynolds est suffisant, le cylindre oscille spontanément de manière quasiment sinusoïdale (voir Fig. 2.7). Pour les nombres de Reynolds faibles, le cylindre se déplace vers le centre puis y reste immobile. La position initiale du cylindre est sans influence sur l'amplitude et la fréquence en régime permanent : il n'y a pas d'hystérésis, ce qui est cohérent avec les expériences.

Plus quantitativement, les résultats numériques pour l'amplitude et la fréquence sont comparés aux résultats expérimentaux dans la figure 2.8 (il n'y a pas de paramètre ajustable). Les valeurs du seuil sont en accord à 20% près, les valeurs de la fréquence également. L'accord entre ces résultats est acceptable, ce qui valide les simulations numériques et permet de les utiliser pour étudier les mécanismes de l'instabilité. L'écart pour les débits importants s'explique par un artefact expérimental : à cause de l'élasticité des fils de suspensions, le cylindre oscille également dans ce cas selon  $x$ . L'écart aux autres débits est peut-être dû à des effets 3D, et notamment à la fine couche de fluide cisailée entre l'extrémité du cylindre et la paroi latérale (selon  $z$ ).

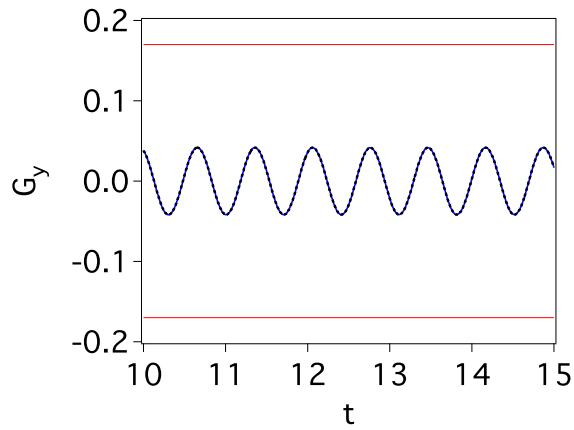


FIGURE 2.7 – Position en fonction du temps pour un cylindre en oscillation libre ( $Re = 20$ ,  $\rho_s = 0,01$ ,  $D = 0,66$ ). La ligne bleue correspond aux résultats numériques, les pointillés à l'ajustement par une sinusoïde, et les droites rouges donnent l'amplitude maximale possible.

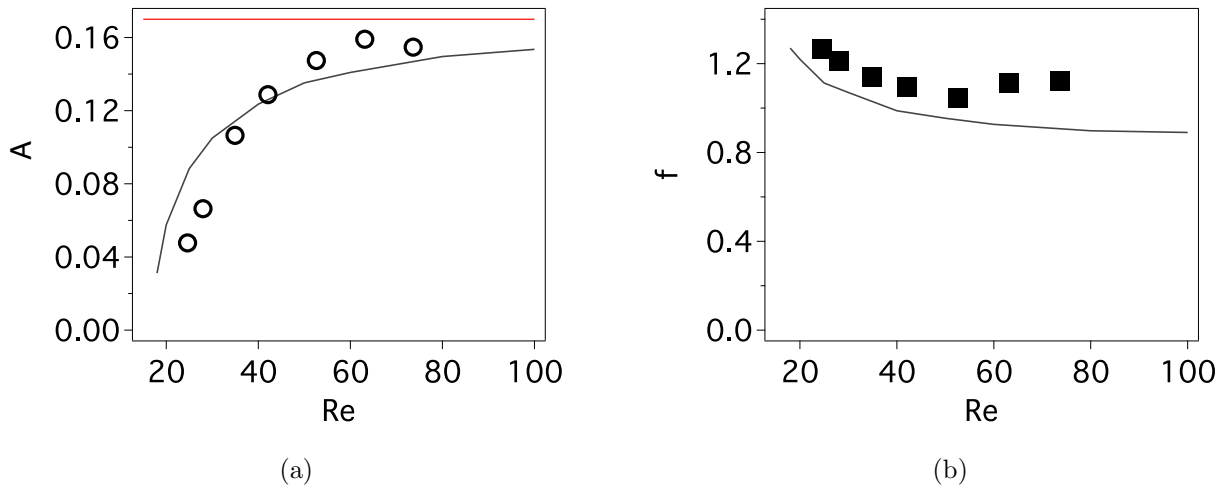


FIGURE 2.8 – Comparaison entre les expériences et les simulations pour  $\beta = 0,66$  et  $\rho_s = 1,19$ . Symboles : expériences, ligne continue grise : simulations. (a) : amplitude. Ligne horizontale rouge : paroi. (b) : fréquence.

### 2.3.3 Champs de vitesse et de pression

Les simulations permettent d'obtenir les champs de vitesse et de pression. Des exemples de ces champs, pour un cylindre qui oscille (voir Fig. 2.7 ), sont présentés en figure 2.9. Ces champs correspondent à des simulations numériques pour un cylindre de masse presque nulle, ce qui signifie que l'inertie du solide n'est pas un ingrédient nécessaire de l'instabilité.

Les forces hydrodynamiques sur le cylindre sont obtenues lors des simulations numériques, à partir des champs de vitesse et de pression. Tout comme la position, les forces oscillent au cours du temps (voir Fig. 2.10 ). Pour des raisons de symétrie, la force hydrodynamique de traînée (selon  $x$ ) oscille à une fréquence double de celle la position  $G_y$ . Pour des nombre de Reynolds modérés (20), cette force diffère peu de la force en régime de Stokes (écart<sup>3</sup> de 20% à  $Re = 20$ ). Comme dans ce régime, la force est surtout due à la composante de pression (à 80% dans l'exemple de la figure 2.9a). La force de portance (selon  $y$ ) oscille à la même fréquence que la position du cylindre, et sa valeur moyenne est nulle. Elle est nettement plus faible que la force selon  $x$  (voir Fig. 2.10b ), ce qui est cohérent avec le fait que la force selon  $y$  est nulle à  $Re = 0$  mais pas la force selon  $x$ . Comme le montre la figure 2.10, pour des cylindres de densités proches ou supérieures à celle du fluide, la force  $F_y$  est essentiellement due à la pression.

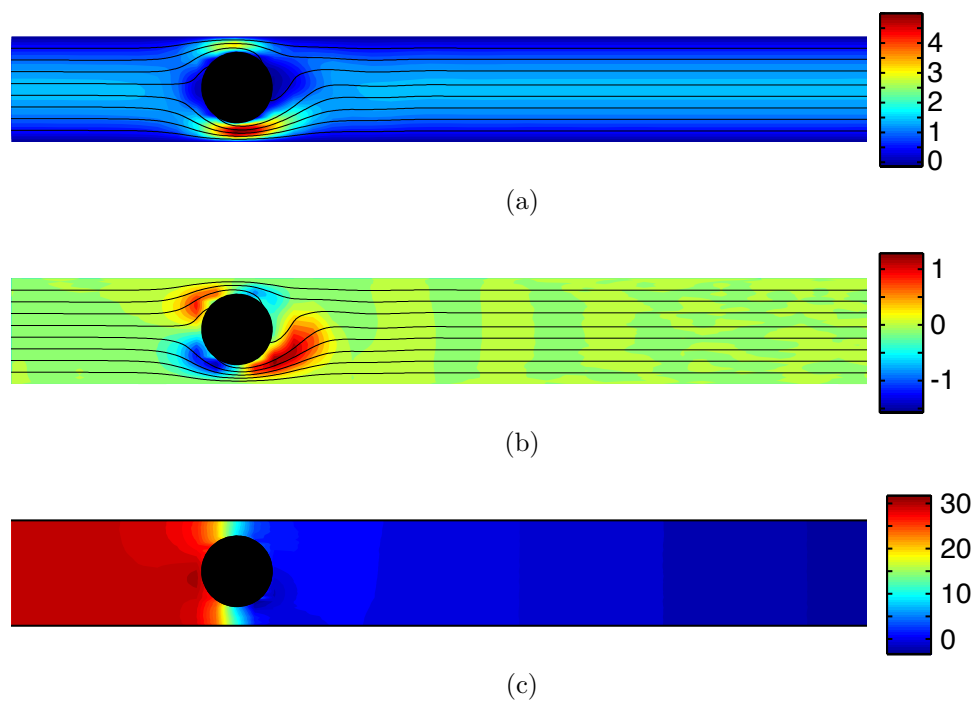


FIGURE 2.9 – Champs de vitesse et de pression pour un cylindre en oscillation libre ( $Re = 20$ ,  $\rho_s = 0,01$ ,  $D = 0,66$ ). Le cylindre est légèrement décalé vers le haut, et se déplace vers le bas. (a) : la couleur donne la valeur de la vitesse selon  $x$ , les lignes noires correspondent aux lignes d'écoulement. (b) : vitesse selon  $y$ . (c) : pression.

3. l'adimensionnement choisi n'est pas le même qu'au chapitre 1.

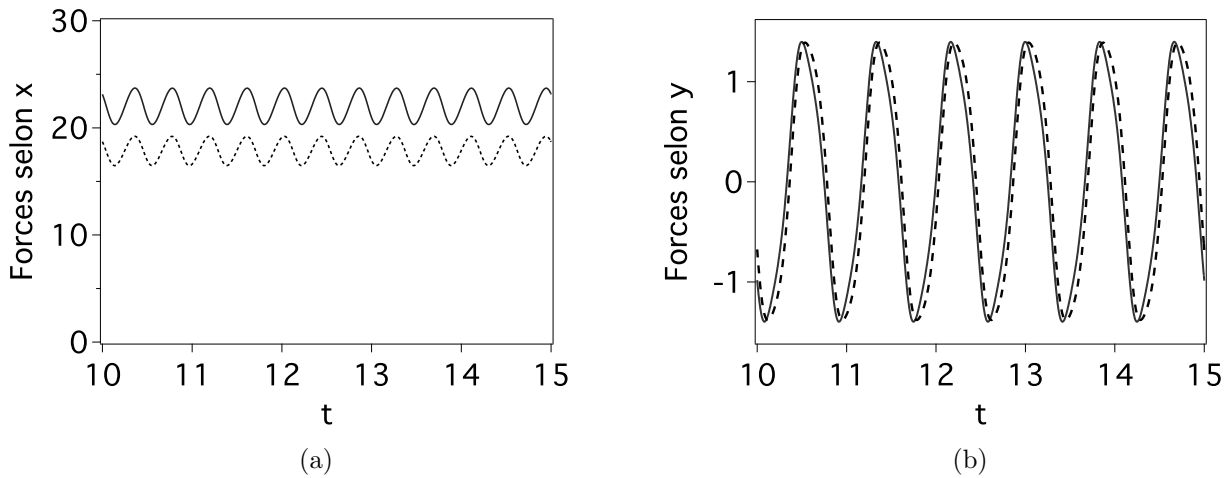


FIGURE 2.10 – Force totale (trait plein) et composante de pression (ligne pointillée) pour un cylindre  $D = 0,66$ ,  $Re = 20$ ,  $\rho_s = 1,19$  (a) : forces selon  $x$ . (b) : forces selon  $y$ .

## 2.4 Description en système dynamique

Les résultats numériques présentés dans la partie précédente, à savoir la valeur des champs des forces, ne suffisent pas pour comprendre qualitativement l'instabilité.

Le but de cette partie est de modéliser l'instabilité par une approche de type système dynamique. Cette approche est fondamentale pour comprendre l'instabilité et pour rationaliser les variations des caractéristiques de l'oscillation, notamment pour prédire dans quelles gammes de paramètres de contrôle l'instabilité apparaît. Il s'agit d'écrire une équation simple (avec un minimum de coefficients) qui décrit la dynamique de la position du centre du cylindre. Nous commencerons par dégager les comportements dominants, puis nous raffinerons l'analyse.

### 2.4.1 Caractérisation du système dynamique par forçage

Cette section vise à établir l'équation du mouvement du centre du cylindre  $G_y$  ( $G_y = 0$  lorsque le cylindre est centré). Pour déterminer cette équation, nous forçons les oscillations, et nous mesurons la force hydrodynamique qui s'exerce sur le cylindre. Il s'agit d'une méthode classique en électronique [99] pour étudier les systèmes bouclés, qui a aussi été utilisée en hydrodynamique pour étudier les vibrations induites par émission de tourbillons [75, 77, 100].

Le cylindre a ainsi un mouvement imposé d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f$  :

$$G_y(t) = A \sin(2\pi ft). \quad (2.2)$$

Le résultat des simulations est la valeur au cours du temps de la force *hydrodynamique* totale  $F_y(t)$  s'exerçant sur le cylindre au cours du temps. Les analyses présentées dans les sections suivantes sont facilitées en décomposant cette force en série de Fourier :

$$F_y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(2\pi kft + \phi_k), \quad (2.3)$$

où les amplitudes  $c_k$  sont choisies positives. Le but de cette section est d'obtenir une expression approchée de  $F_y$  comme la somme d'un petit nombre de termes, qui dépendent notamment de la position du cylindre  $G_y$  et de ses dérivées.

### 2.4.1.1 Réponse à une excitation de faible amplitude

Dans toute cette section, nous nous limiterons à une configuration, caractérisée par un diamètre  $D = 0,66$  et un écoulement à  $Re = 20$ . Le cas d'un cylindre forcé d'osciller à une amplitude faible ( $A = 5 \times 10^{-4}$ ), afin d'étudier le régime linéaire. Dans ce régime, la force est sinusoïdale :

$$F_y(t) = c_1 \sin(2\pi ft + \phi_1). \quad (2.4)$$

De plus, dans ce régime, l'amplitude  $c_1$  est proportionnelle à l'amplitude de l'oscillation  $A$ .

La figure 2.11 montre pour ce jeu de paramètres les variations de  $c_1$  et de  $\phi_1$  obtenues en faisant varier la fréquence  $f$  du forçage .

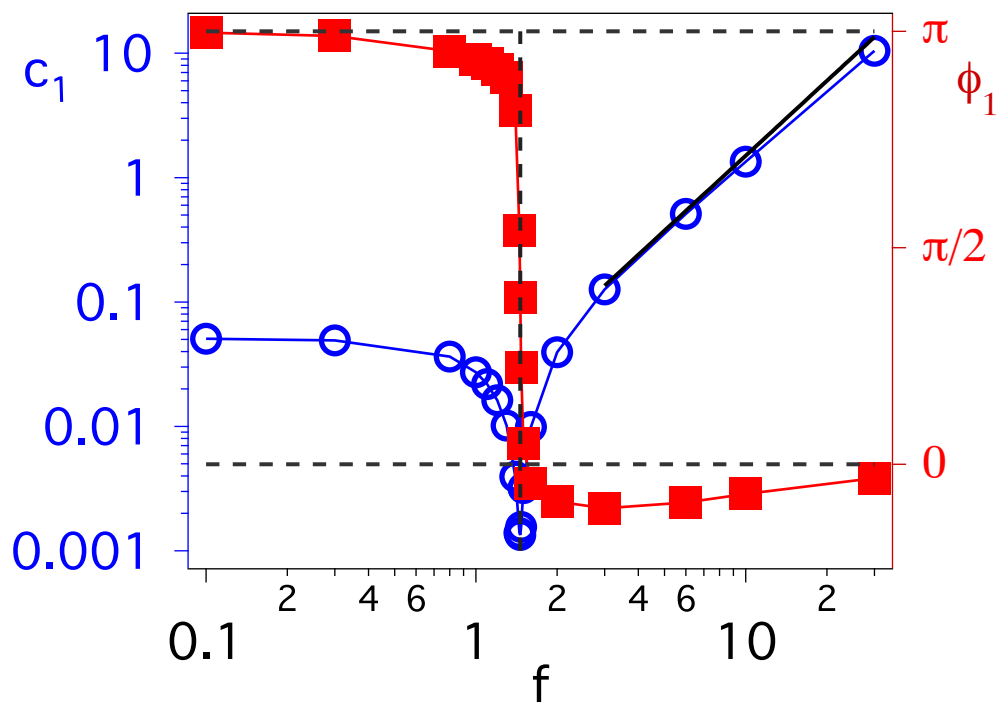


FIGURE 2.11 – Amplitude ( $\circ$ ) (légende à gauche) et phase ( $\blacksquare$ ) (légende à droite) de la force pour des oscillations forcées en régime linéaire ( $A = 5 \times 10^{-5}$ ) à  $Re = 20$ . Ligne épaisse noire : variation en  $c_1 \propto f^2$ .

Nous nous concentrons tout d'abord sur les résultats aux basses fréquences, lorsque le cylindre se déplace lentement par rapport aux temps caractéristiques d'établissement d'un régime stationnaire. Comme attendu, lorsque la fréquence tend vers 0, la force est approximativement constante et tend vers la valeur mesurée pour un cylindre fixe. Cette dernière est présentée dans la figure 2.12 en fonction du décentrement  $G_y$ . Quelle que soit la position du cylindre, cette force tend à ramener le cylindre vers le centre de la cellule ( $G_y = 0$ ). Au voisinage du centre, il est possible de définir une raideur (adimensionnée)  $k$

telle que :

$$F_y = -kG_y, \quad (2.5)$$

avec  $k = 95$  dans l'exemple donné.

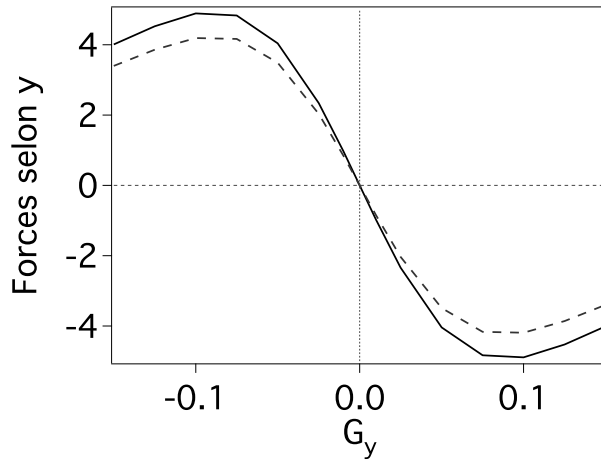


FIGURE 2.12 – Force totale selon  $y$  (traits pleins) et composante de pression (tirets) en fonction du décentrement pour un cylindre fixe ( $D = 0,66$ ,  $Re = 20$ ).

Aux fréquences élevées,  $c_1$  a une dépendance en fréquence voisine de  $f^2$  (en première approximation), comme le montre la ligne noire continue de la figure 2.11. Ceci correspond à une force de la forme :

$$F_y(t) = -m_a \ddot{G}_y, \quad (2.6)$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps et où  $m_a$  est une «masse ajoutée» qui correspond à l'accélération du fluide (ici  $m_a = 0,68$ , soit une «densité ajoutée»  $\rho_a = 2,0$ ).

En extrapolant ces deux résultats aux fréquences intermédiaires, la force hydrodynamique totale exercée sur le cylindre  $F_y$  se modélise comme un ensemble masse-ressort :  $F_y = -kG_y - m_a \ddot{G}_y$ . Ce modèle prédit une résonance à une fréquence intermédiaire  $f_r = 1/(2\pi)\sqrt{k/m_a} = 1,9$ . Une résonance est effectivement observée (voir Fig. 2.11), à une fréquence  $f_r = 1,46$  légèrement inférieure à celle estimée à partir de  $k$  et de la masse ajoutée à haute fréquence. Ce décalage peut s'expliquer par une faible variation de la masse ajoutée  $m_a$  avec la fréquence (l'ajustement des 4 derniers points de la figure 2.11 donne<sup>4</sup>  $c_1 \sim f^{1,85}$ , soit  $m_a \sim f^{-0,15}$ ).

La figure 2.11 montre qu'il n'y a pas de discontinuité de la phase à la résonance. L'élargissement traduit l'existence d'un terme  $\alpha_0 \dot{G}_y$  proportionnel à la vitesse. L'équation donnant la force s'écrit :

$$F_y = -m_a \ddot{G}_y + \alpha_0 \dot{G}_y - kG_y. \quad (2.7)$$

Ce terme est crucial pour déterminer si le cylindre oscille ou non ; nous l'appellerons «terme moteur» même lorsqu'il est en fait dissipatif. Si  $\alpha_0$  est négatif, la force hydrodynamique  $F_y$  est de signe opposé à celui de la vitesse  $\dot{G}_y$ , et le terme  $\alpha_0 \dot{G}_y$  est dissipatif. Il s'agit du cas usuel en hydrodynamique (sphère en sédimentation en régime de Stokes par exemple). Par contre, si  $\alpha_0$  est positif, la force hydrodynamique  $F_y$  est de même signe que la vitesse  $\dot{G}_y$ , le terme  $\alpha_0 \dot{G}_y$  est moteur, et la position  $G_y = 0$  est instable.

4. cependant, les valeurs de  $c_1$  aux valeurs les plus faibles de  $f$  prennent aussi en compte en partie l'effet des termes proportionnel à  $\dot{G}_y$ , ce qui peut modifier la variation de  $c_1$  avec  $f$ .

Nous cherchons à présent à déterminer quantitativement la valeur de  $\alpha_0$ . En prenant la valeur moyenne temporelle du produit de l'équation 2.7 par  $\dot{G}_y$ , nous obtenons :

$$\alpha_0 = \frac{c_1}{A\omega} \sin(\phi_1), \quad (2.8)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ . Cette équation montre que le signe de  $\sin(\phi_1)$  est le même que celui de  $\alpha_0$  : le cylindre oscille si  $\sin(\phi_1) > 0$ . Dans la suite, nous utiliserons indifféremment le signe de  $\alpha_0$  ou celui de  $\sin(\phi_1)$  pour caractériser l'amortissement ou l'amplification de l'oscillation. La variation avec la fréquence<sup>5</sup> du coefficient  $\alpha_0$  est représentée dans la figure 2.13.

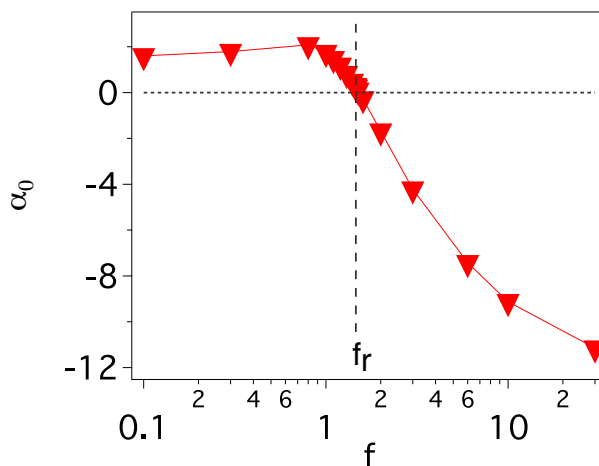


FIGURE 2.13 – Variation du coefficient  $\alpha_0$  en fonction de la fréquence, dans le cas d'une excitation d'amplitude faible ( $D = 0,66$ ,  $Re = 20$ ). Les tirets verticaux indiquent la fréquence de résonance.

### 2.4.1.2 Réponse à une excitation d'amplitude finie

Dans toute cette section, nous nous limiterons à la même configuration que dans la section précédente, à savoir un cylindre de diamètre  $D = 0,66$  dans un écoulement à  $Re = 20$ . L'excitation est ici d'amplitude finie, ce qui signifie que nous étudions les effets non-linéaires qui déterminent l'amplitude des oscillations libres. La force hydrodynamique  $F_y$  n'est plus sinusoïdale, et l'amplitude du fondamental  $c_1$  n'est plus proportionnelle à l'amplitude de l'excitation  $A$ .

Lorsque l'amplitude  $A$  n'est plus très petite, la gamme de déplacements  $G_y$  balayée est plus large que la zone près de  $G_y = 0$  pour laquelle la raideur  $k$  est constante. Au-delà, la raideur effective  $k$  diminue légèrement avec l'amplitude (voir Fig. 2.12). Cette variation change *quantitativement* mais pas *qualitativement* le comportement du système. Le paramètre important pour l'apparition des instabilités est le coefficient  $\alpha$  du terme en  $\dot{G}_y$ , qui est calculé grâce à l'équation  $\alpha = (c_1/A\omega) \sin(\phi_1)$  (analogue à Éq. (2.8)). Les variations de  $\alpha$  avec l'amplitude  $A$  imposée sont représentées pour deux fréquences en figure 2.14, afin de montrer leur caractère générique. La valeur de  $\alpha$  à l'origine (amplitudes infinitésimales)

<sup>5</sup>. comme  $\alpha_0$  dépend de la fréquence, l'équation 2.7 n'est valable que pour des oscillations quasi-sinusoïdales. Cette hypothèse est bien vérifiée, comme le montre la figure 2.2

correspond à la valeur  $\alpha_0$  représentées en figure 2.13. Ces variations sont bien ajustées par le polynôme :

$$\alpha = \alpha_0 - (\kappa/4)A^2, \quad (2.9)$$

ce qui correspond à une force :

$$F_y = (\alpha_0 - \kappa(G_y)^2)\dot{G}_y. \quad (2.10)$$

Cette expression signifie qu'à une fréquence donnée,  $\alpha$  (et donc  $\sin(\phi_1)$ ) diminue avec l'amplitude, et peut changer de signe si  $\alpha_0 > 0$ . Cette inversion du signe de  $\alpha$  est illustrée par les figures 2.11 et 2.15, pour un écoulement à  $Re = 20$ . Pour un forçage de faible amplitude,  $\sin(\phi_1) > 0$  (voir Fig. 2.11) à la fréquence de résonance, pour une valeur de transition de l'amplitude du forçage,  $\sin(\phi_1) = 0$  à la fréquence de résonance (voir Fig. 2.15a), et pour les valeurs plus grandes de l'amplitude du forçage,  $\sin(\phi_1) < 0$  (voir Fig. 2.15b). L'équation (2.10) contient le terme cubique<sup>6</sup>  $-\kappa(G_y)^2\dot{G}_y$ , qui indique que l'harmonique dominant est l'harmonique 3. Une analyse de Fourier de la force pour un déplacement d'amplitude finie confirme ce résultat (la valeur de l'amplitude des autres harmoniques est inférieure au dixième de celle de l'harmonique 3). La figure 2.15 montre les variations de l'amplitude  $c_3$  de l'harmonique 3.

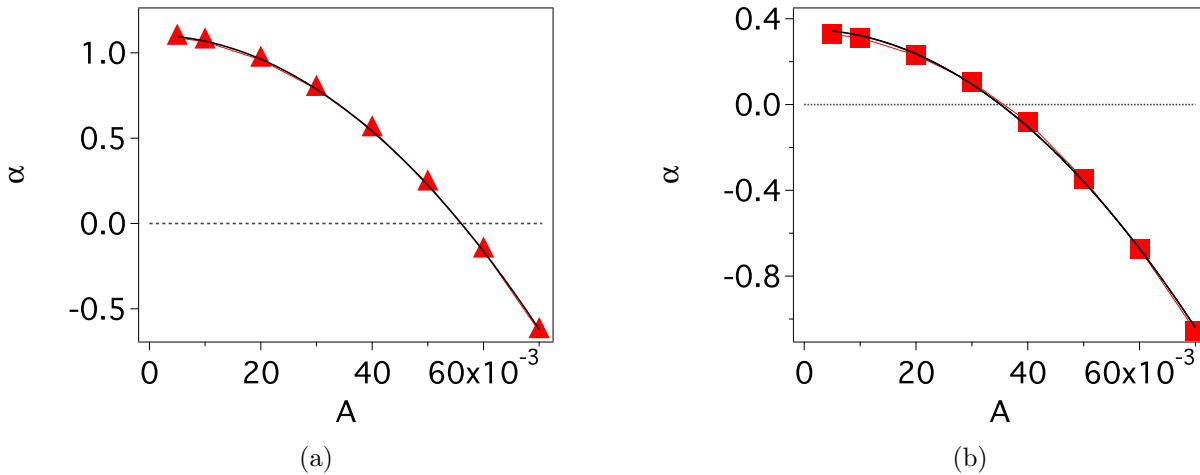


FIGURE 2.14 – Coefficient du terme moteur en fonction de l'amplitude imposée, pour deux fréquences différentes. Les lignes noires correspondent à un ajustement par  $\alpha = \alpha_0 - (\kappa/4)A^2$ . (a) :  $f = 1,26$ ; (b) :  $f = 1,46$ .

### 2.4.1.3 Influence du nombre de Reynolds

Dans cette section, nous nous limiterons toujours à un cylindre de diamètre  $D = 0,66$ , mais le nombre de Reynolds n'est plus fixé à  $Re = 20$ . Nous étudions ainsi la variation des coefficients  $k$ ,  $m_a$ ,  $\alpha_0$  et  $\kappa$  en fonction du nombre de Reynolds, et en particulier au voisinage du seuil des oscillations libres.

<sup>6</sup> cette équation a été obtenue uniquement à partir de l'amplitude  $c_1$  et de la phase  $\phi_1$  du fondamental de la force mesurée, et pas à partir de l'amplitude ou de la phase des harmoniques : la prédiction n'est donc pas triviale.



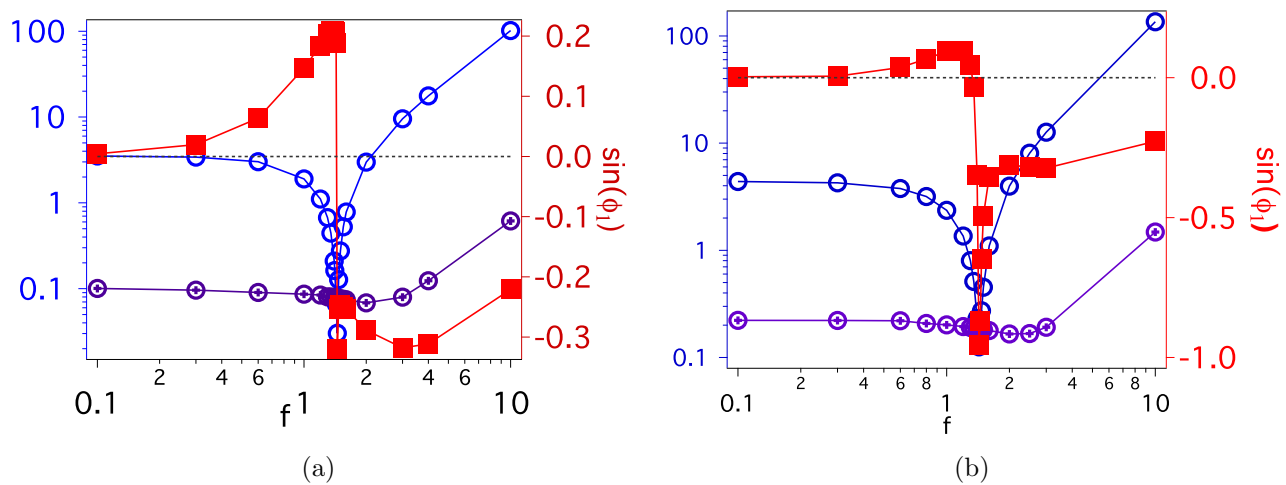


FIGURE 2.15 – Amplitude et phase de la force hydrodynamique sur le cylindre pour des oscillations forcées en régime non-linéaire ( $Re = 20$ ,  $D = 0,66$ ). L'échelle de gauche correspond aux amplitudes :  $(\bigcirc)$  : amplitude  $c_1$  du fondamental,  $(\oplus)$  : amplitude  $c_3$  de l'harmonique 3. (a) :  $A = 0,0377$  qui correspond à l'amplitude des oscillations libres pour  $\rho_s = 0.01$ . (b) :  $A = 0,05$

Tout d'abord nous étudions l'influence du nombre de Reynolds dans le régime linéaire. Les variations de l'amplitude  $c_1$  et de la phase  $\phi_1$  en fonction de la fréquence, pour différents nombres de Reynolds, sont représentées en figure 2.16. La valeur de  $c_1$  à basse fréquence diminue avec le nombre de Reynolds : ceci montre que la raideur  $k$  diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. La valeur de la raideur  $k$  diminue ainsi de moitié lorsque le nombre de Reynolds passe de 14 à 50. La masse ajoutée, qui correspond à la force aux hautes fréquences, est quant à elle quasiment indépendante du nombre de Reynolds (la valeur de la masse ajoutée diminue de seulement 15% entre  $Re = 14$  et  $Re = 50$ ). La variation plus importante de la raideur que de la masse ajoutée permet de prédire que la fréquence de résonance se décale vers les basses fréquences lorsque le nombre de Reynolds augmente, ce qui effectivement ce que nous observons dans la figure 2.16.

Nous présentons brièvement les caractéristiques de la variation des coefficients avec le nombre de Reynolds, que nous utiliserons de manière plus détaillée en section 2.4.2. La valeur de  $\sin(\phi_1)$  est représenté dans les figures 2.16. Pour  $Re = 14$ ,  $\sin(\phi_1)$  est négatif pour toutes les fréquences, pour  $Re = 16,5$ ,  $\sin(\phi_1)$  est positif uniquement aux basses fréquences, pour  $Re = 20$  (voir Fig. 2.11) et  $Re = 30$ ,  $\sin(\phi_1)$  n'est négatif qu'aux hautes fréquences, et pour  $Re = 50$ ,  $\sin(\phi_1)$  n'est positif qu'au voisinage de la résonance.

La figure 2.17 donne la variation de  $\alpha_0$  au voisinage du seuil des oscillations libres, pour la fréquence de résonance. Ce coefficient varie continûment avec le nombre de Reynolds, et change de signe.

En ce qui concerne la réponse à une excitation d'amplitude finie (régime non-linéaire), la variation de  $\alpha$  avec l'amplitude est toujours parabolique : nous pouvons toujours décomposer le comportement de  $\alpha$  en deux termes comme l'indique l'équation 2.9, et le coefficient  $\kappa$  est bien défini. La figure 2.17b montre que la variation de  $\kappa$  avec  $Re$  est continue, et que  $\kappa$  reste positif.

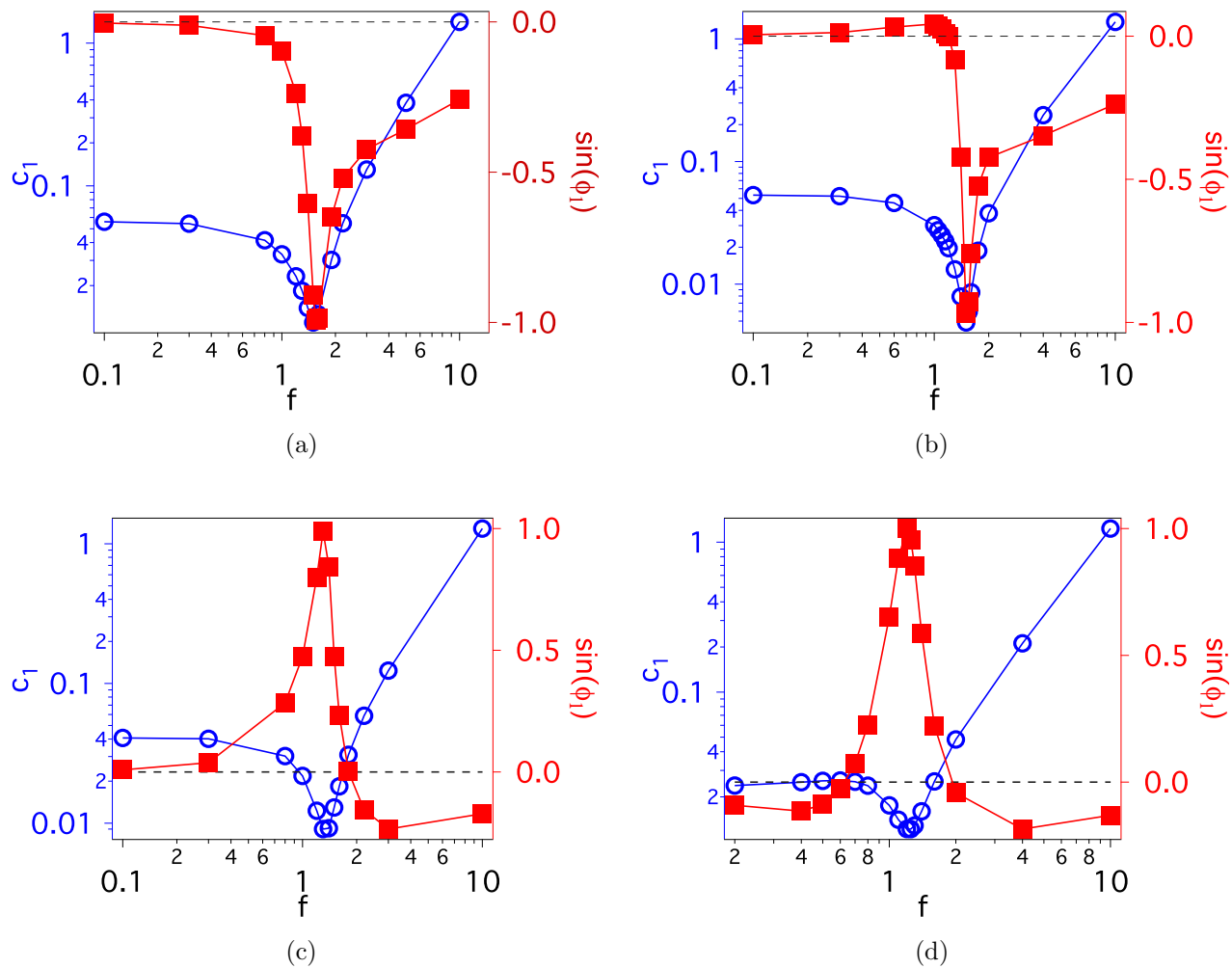


FIGURE 2.16 – Amplitude et phase de la force hydrodynamique sur le cylindre pour des oscillations forcées en fonction du nombre de Reynolds, en régime linéaire ( $D = 0,66$ ,  $A = 5 \times 10^{-4}$ ). (a) :  $Re = 14$ . (b) :  $Re = 16, 5$ . (c) :  $Re = 30$ . (d) :  $Re = 50$ .

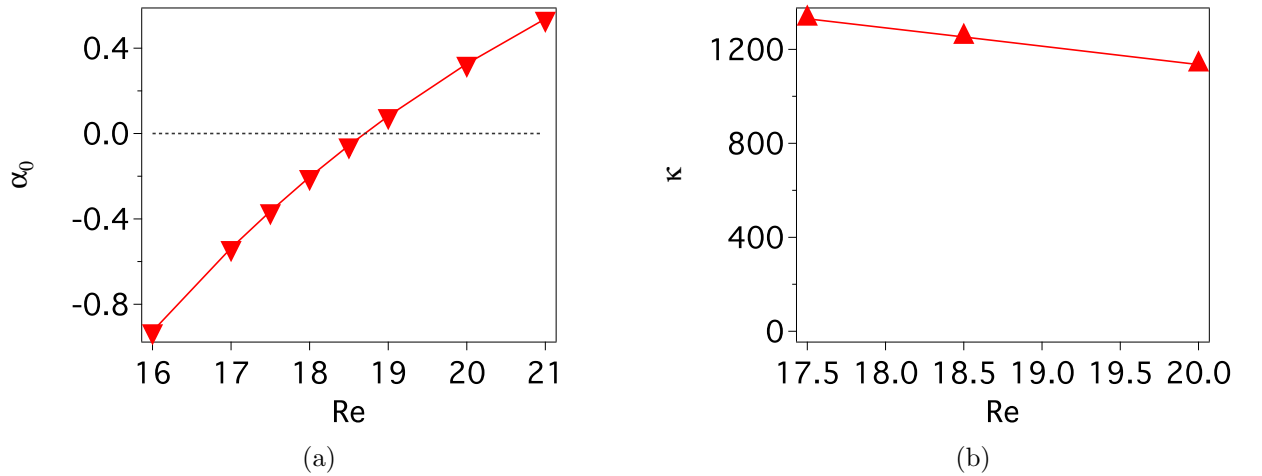


FIGURE 2.17 – Variation des coefficients  $\alpha_0$  et  $\kappa$  qui caractérisent le terme moteur, pour  $f = 1,46$  (correspond à la résonance à  $Re = 20$ ). (a) : coefficient  $\alpha_0$ ; (b) : coefficient  $\kappa$ .

#### 2.4.1.4 Bilan : modélisation de la force hydrodynamique

En faisant le bilan de l'étude précédente (voir Éq. (2.7) et Éq. (2.10)), la force hydrodynamique peut s'écrire sous la forme d'une équation de Van der Pol [101, 102, 103] :

$$F_y = -m_a \ddot{G}_y + (\alpha_0 - \kappa(G_y)^2) \dot{G}_y - kG_y. \quad (2.11)$$

L'analyse effectuée dans les sections précédentes a montré que  $k$  dépend de  $G_y$ , que  $m_a$  et  $\kappa$  dépendent faiblement de la fréquence, et que  $\alpha_0$  en dépend notablement. La masse ajoutée  $m_a$  dépend peu du nombre de Reynolds,  $k$  et  $\kappa$  en dépendent faiblement,  $\alpha_0$  en dépend beaucoup, et en particulier change de signe.

## 2.4.2 Prédictions du modèle dynamique pour les oscillations libres

L'objectif de cette section est d'utiliser les résultats des oscillations forcées pour prédire le seuil et l'amplitude des oscillations libres. Nous confronterons ces prédictions aux résultats des simulations des oscillations libres.

Lors des oscillations forcées, le cylindre est soumis à la force hydrodynamique  $F_y$  et à une force extérieure supplémentaire ajustée pour obtenir l'oscillation imposée. Les oscillations libres correspondent, elles, au cas où le cylindre n'est soumis qu'à la force hydrodynamique  $F_y$ . Pour un cylindre de masse  $m_s$ , la seconde loi de Newton s'écrit :

$$m_s \ddot{G}_y = F_y. \quad (2.12)$$

En utilisant le modèle de  $F_y$  donné par l'équation 2.11, nous obtenons :

$$(m_a + m_s) \ddot{G}_y - (\alpha_0 - \kappa(G_y)^2) \dot{G}_y + kG_y = 0, \quad (2.13)$$

qui est l'équation d'un oscillateur de Van der Pol. D'après cette équation, le cylindre libre ne peut osciller en régime permanent qu'à la fréquence de résonance  $f_r$  :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_a + m_s}}, \quad (2.14)$$

qui ne dépend que de la raideur  $k$  et de la masse totale  $m_a + m_s$ . En effet, en régime permanent, la moyenne du terme moteur doit être nulle (l'énergie du cylindre est constante au cours d'un cycle), et il n'y a pas de décalage de la fréquence à cause de la dissipation. Le signe de  $\alpha_0$  détermine le comportement en régime permanent : si  $\alpha_0$  est négatif, le régime permanent correspond à un cylindre immobile au centre ( $G_y = 0$ ), si  $\alpha_0$  est positif le cylindre oscille symétriquement par rapport au centre. Lorsque le cylindre oscille, l'amplitude des oscillations en régime permanent est fixée par le terme non-linéaire  $-\kappa(G_y)^2\dot{G}_y$ . En régime quasi-sinusoidal (amplitude faible), l'approximation du premier harmonique prédit une amplitude à saturation égale à [102, 103].

$$A = 2\sqrt{\alpha_0/\kappa}. \quad (2.15)$$

### 2.4.2.1 Nature de la bifurcation

Dans cette partie, nous déterminons la nature de la bifurcation, en étudiant les oscillations au voisinage du seuil.

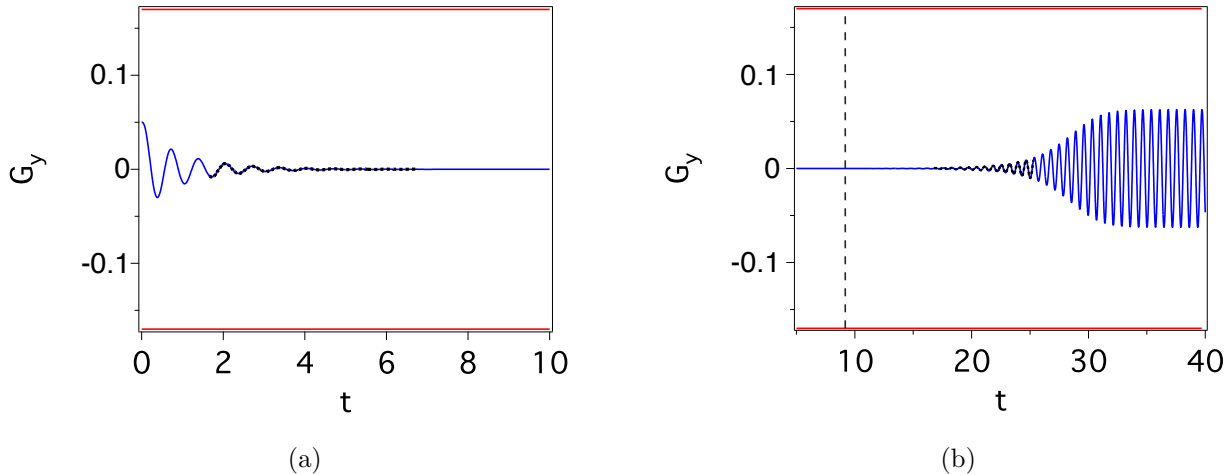


FIGURE 2.18 – Régime transitoire près du seuil ( $D = 0,66$ ,  $\rho_s = 0,01$ , oscillations libres). Courbes bleues : position en fonction du temps. Lignes pointillées noires : ajustement. (a) :  $Re = 14$  (valeur inférieure au seuil); (b) :  $Re = 22$  (valeur supérieure au seuil). Les tirets verticaux indiquent le moment à partir duquel le cylindre est libre d'osciller.

La figure 2.18 montre le régime transitoire en-dessous et au-dessus du seuil, obtenu par simulation des oscillations libres. Ces courbes sont similaires aux résultats expérimentaux (voir Fig. 2.3). En-dessous du seuil, lorsque le cylindre est initialement décentré, il oscille autour de la position centrale, avec une amplitude qui diminue et tend vers zéro. Au contraire, au-dessus du seuil, le cylindre oscille spontanément, avec une amplitude qui augmente avec le temps, jusqu'à saturer à cause des effets non-linéaires. Il s'agit des comportements usuels d'un oscillateur de Van der Pol. Lorsque l'amplitude est faible, ces courbes sont bien ajustées par :

$$G_y = A_0 \sin(2\pi f_{lin}t + \psi) \exp(\sigma t), \quad (2.16)$$

ce qui permet de définir la fréquence linéaire  $f_{lin}$  ainsi que le taux de croissance  $\sigma$  (les deux autres paramètres de l'ajustement,  $A_0$  et  $\psi$ , ne contiennent pas d'information utile).

L'équation 2.13 prédit ce comportement, et donne :

$$f_{lin} = f_r \quad (2.17)$$

$$\sigma = \frac{\alpha_0}{2(m_a + m_s)} \quad (2.18)$$

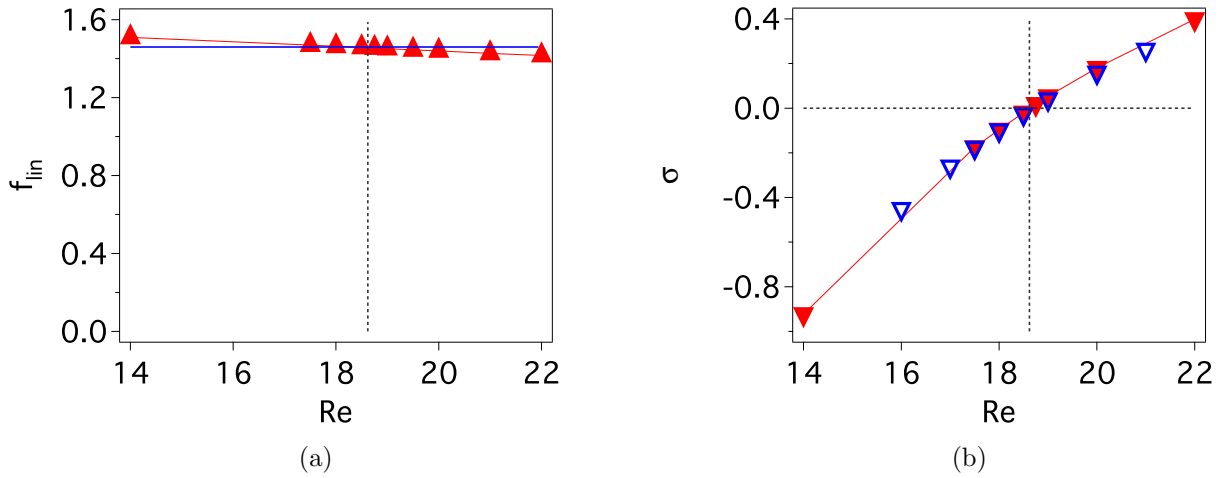


FIGURE 2.19 – Caractéristiques du régime transitoire des oscillations libres, près du seuil ( $\rho_s = 0,01$ ). (a) : fréquence en régime linéaire  $f_{lin}$  ( $\blacktriangle$ ) : valeurs obtenues par ajustement du régime transitoire des oscillations libres, (—) : valeur obtenue à partir des oscillations forcées à et des équations (2.17) et (2.14). (b) : taux de croissance  $\sigma$ . ( $\blacktriangledown$ ) : valeurs obtenues par ajustement du régime transitoire des oscillations libres ( $f = 1,46$ ). ( $\blacktriangledown$ ) : valeurs obtenues à partir des coefficients calculés à partir des oscillations forcées, et en utilisant l'équation (2.18).

La figure 2.19a montre la fréquence ( $f_{lin}$ ) des oscillations libres : celle-ci est relativement constante au voisinage du seuil avec une valeur est proche de la fréquence de déduite des oscillations forcées grâce aux équations (2.17) et (2.14). La figure 2.19b montre l'évolution du taux de croissance, qui se caractérise par un changement de signe au passage du nombre de Reynolds critique. Ce taux de croissance est évalué de deux manières : directement par l'ajustement du régime transitoire des oscillations libres (voir Fig. 2.18), et également en utilisant les résultats des oscillations forcées et l'équation 2.18. Les résultats issus des deux méthodes sont proches, ce qui confirme la pertinence du modèle de Van der Pol (voir Éq. (2.13)).

L'amplitude des oscillations libres est présentée dans la Fig. 2.20. Comme le taux de croissance, elle est évaluée par deux méthodes : directement à partir des résultats des oscillations libres, et aussi à partir des résultats des oscillations forcées et de l'équation (2.15). L'accord entre ces deux méthodes est raisonnable. L'amplitude des oscillations libres augmente comme la racine de l'écart au seuil (voir Fig. 2.20). La bifurcation est donc une bifurcation de Hopf. Ce type de bifurcation est attendu pour un système décrit par une équation de Van der Pol, lorsque le coefficient  $\alpha_0$  varie continûment d'une valeur négative à une valeur positive, ce qui est le cas pour l'instabilité étudiée (voir Fig. 2.17). La bifurcation reste une bifurcation de Hopf pour des cylindres de masse non-nulle, en particulier pour la valeur de la densité du cylindre  $\rho_s = 1,19$ , qui correspond à la valeur expérimentale (voir Fig. 2.21 et Fig. 2.22).

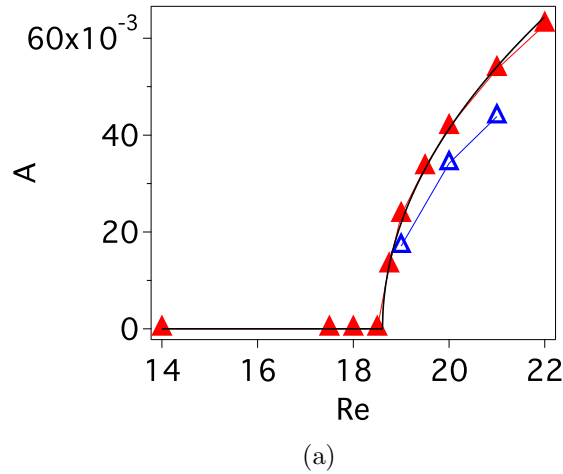


FIGURE 2.20 – Amplitude des oscillations libres en régime permanent pour  $D = 0,66$  et  $\rho_s = 0,01$ . ( $\blacktriangle$ ) : valeurs déduites de la simulation des oscillations libres. La courbe noire est l'ajustement de la courbe précédente par  $A = K\sqrt{Re - Re_c}$  au-dessus du seuil  $Re_c$ . ( $\triangle$ ) : valeurs obtenues à partir des coefficients calculés à partir des oscillations forcées, et en utilisant l'équation (2.15).

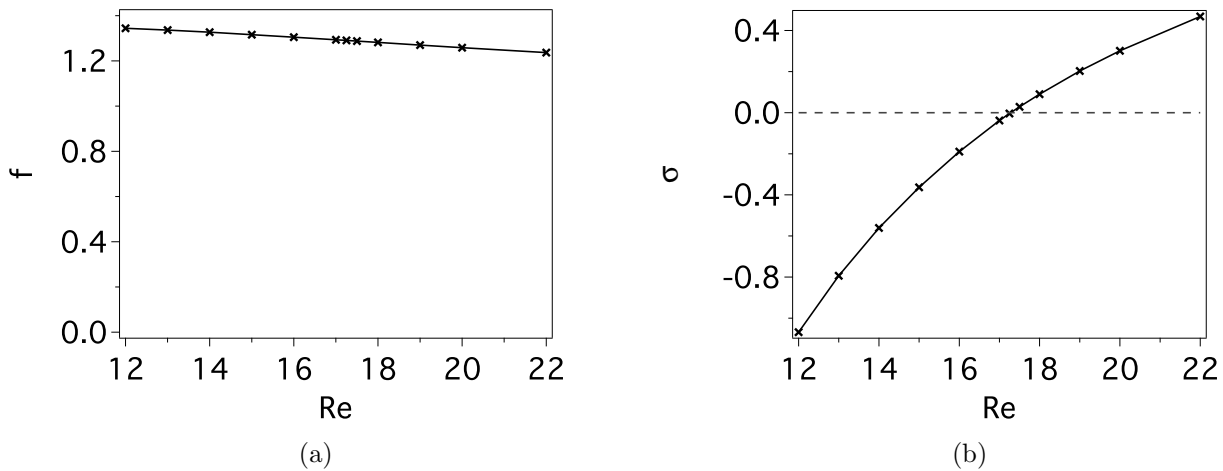
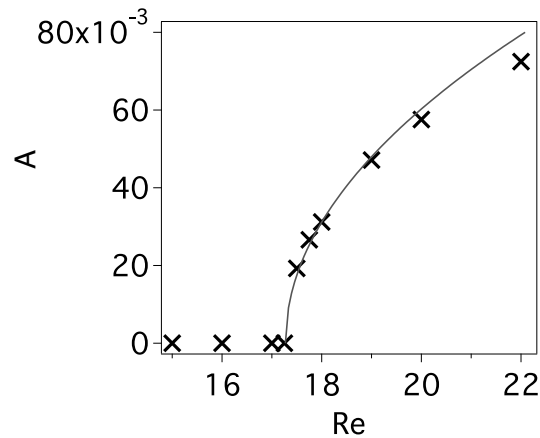


FIGURE 2.21 – Caractéristiques du régime transitoire des oscillations libres, près du seuil ( $\rho_s = 1,19$ ) (a) : fréquence en régime linéaire  $f_{lin}$  (b) : taux de croissance  $\sigma$ .



(a)

FIGURE 2.22 – Amplitude de l'oscillation en régime permanent des oscillations libres pour  $D = 0,66$  et  $\rho_s = 1,19$ . ( $\times$ ) : points numériques, ligne : ajustement par  $A = K\sqrt{Re - Re_c}$

#### 2.4.2.2 Influence de la densité du cylindre

L'équation 2.14 prédit le décalage en fréquence des oscillations lorsque la densité du cylindre varie, et implique que la pulsation des oscillations libres vérifie :

$$\rho_s = -\rho_a + \frac{k}{S} \frac{1}{\omega^2}, \quad (2.19)$$

où  $S$  est la surface du disque représentant le cylindre à 2D, et  $\rho_a$  la «densité ajoutée». Cette variation est représentée en figure 2.23, et un ajustement donne  $\rho_a = 3,0$  et  $k = 80$ . La raideur  $k$  correspond bien à la valeur statique, pour une amplitude  $A \approx 0,06$  (voir Fig. 2.12), et la masse ajoutée est cohérente avec la valeur qui permet de retrouver la fréquence de résonance de la figure 2.11 (étant donné la valeur de  $k$ ).

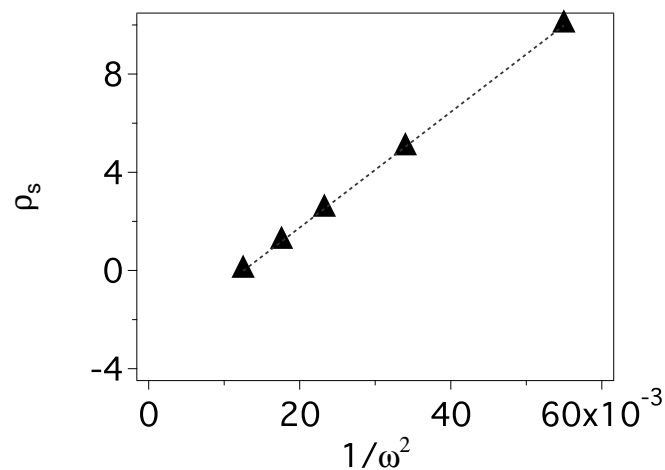


FIGURE 2.23 – Graphe obtenu à partir de la variation de la pulsation avec la masse du cylindre.  $Re = 20$ . La ligne pointillée est un ajustement linéaire.

Comme nous l'avons vu précédemment, le cylindre oscille si  $\alpha_0$  est positif à la fréquence de résonance, ou de manière équivalente si  $\sin(\phi_1)$  est positif. La figure 2.16 montre le comportement de  $\sin(\phi_1)$  pour plusieurs nombres de Reynolds. Le comportement des cylindres en oscillations libres, en fonction de leur densité, se déduit de la figure précédente grâce à l'équation 2.14 qui donne la variation de la fréquence de résonance due à la masse du cylindre. Cette équation montre que la fréquence d'oscillation libre d'un cylindre de masse nulle est égale à la fréquence de résonance  $f_0$  des oscillations forcées ; les fréquences inférieures à  $f_0$  correspondent aux cylindres de masses plus élevées. Les paragraphes suivants détaillent l'influence de la densité sur le comportement des oscillations, à différents nombre de Reynolds, pour  $D = 0,66$ .

La figure 2.16 montre que  $\sin(\phi_1)$  est négatif à  $Re = 14$  pour toutes les fréquences inférieures à  $f_0$  : quelle que soit la masse du cylindre, il n'y a pas d'oscillations libres (en régime permanent) pour  $Re = 14$ .

Un comportement différent est observé pour  $Re = 16,5$ . Comme  $\sin(\phi_1)$  est négatif en  $f_0$  : un cylindre de masse nulle n'oscille toujours pas à  $Re = 16,5$ . Par contre,  $\sin(\phi_1)$  est positif si la fréquence est suffisamment basse, ce qui est le cas si le cylindre a une masse suffisante : un cylindre de masse suffisante oscille à  $Re = 16,5$ . Le nombre de Reynolds critique est donc plus faible si la masse du cylindre est non-nulle : l'inertie du cylindre abaisse le seuil des oscillations.

En augmentant encore le nombre de Reynolds, par exemple à  $Re = 20$  ou à  $Re = 30$ ,  $\sin(\phi_1)$  est positif pour toutes les fréquences inférieures à  $f_0$  : le cylindre oscille quelle que soit la masse du cylindre.

Au plus grand nombre de Reynolds étudié ( $Re = 50$ ), le comportement change de nouveau. La valeur de  $\sin(\phi_1)$  reste positive pour  $f_0$  : un cylindre de masse nulle oscille à ce nombre de Reynolds. Par contre,  $\sin(\phi_1)$  est négatif si la fréquence est suffisamment basse : cela montre qu'un cylindre de masse élevée n'oscille pas à ce nombre de Reynolds. Le cylindre se place spontanément de manière stable au milieu des deux plaques. Cette restabilisation a été observée lors d'expériences préliminaires.

Ces différents comportements déduits des résultats des oscillations forcées sont vérifiés en utilisant directement les résultats des oscillations libres pour l'amplitude, en fonction du nombre de Reynolds et de la densité (voir Fig. 2.24). Comme le montre la version agrandie de la figure précédente (voir Fig. 2.24b) le cylindre n'oscille pas si  $Re = 14$ , quelle que soit sa masse. Près du seuil, les courbes obtenues pour les densités élevées sont décalées vers les faibles nombre de Reynolds par rapport à celle qui correspond à une densité presque nulle : le seuil de l'oscillation diminue bien lorsque la densité du cylindre augmente. Les résultats à grand  $Re$  (triangles de figure 2.24a) confirment que si la densité du cylindre est élevée, la position  $G_y = 0$  redevient stable. Les prédictions tirées de l'étude des oscillations forcées sont bien confirmées par les résultats des oscillations libres.

### 2.4.2.3 Influence de la gravité

La gravité tend à ramener le cylindre dans le plan moyen des plaques, et augmente donc la raideur (effective) totale et par conséquent la fréquence de résonance. L'effet de la gravité est donc l'opposé de celui de l'augmentation de la masse du cylindre (en l'absence de gravité). Cette remarque permet de prédire, sans avoir besoin de reprendre l'étude précédente de manière complète, que la gravité augmente le nombre de Reynolds seuil (bien que la gravité soit une force conservative), et peut augmenter le seuil des restabilisations.



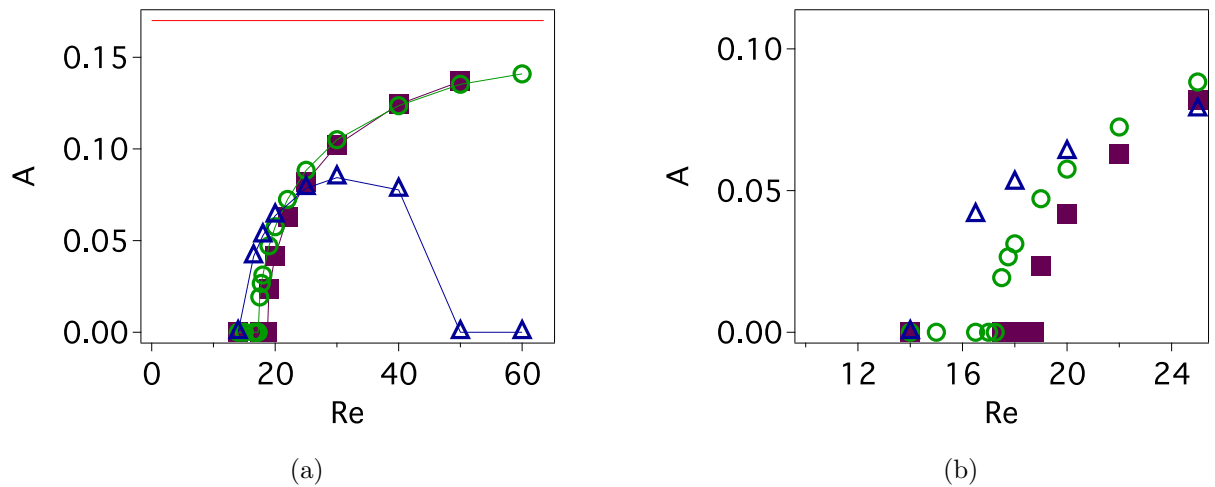


FIGURE 2.24 – Variation de l’amplitude des oscillations libres avec le nombre de Reynolds pour des cylindres de densités différentes ( $D = 0,66$ ). (■) :  $\rho_s = 0,01$ , (○) :  $\rho_s = 1,19$ , (△) :  $\rho_s = 15$ , la droite rouge donne l’amplitude maximale possible. (a) : variation sur toute la plage de  $Re$ . (b) : zoom de la figure (a) près du seuil des oscillations.

#### 2.4.2.4 Influence du diamètre du cylindre

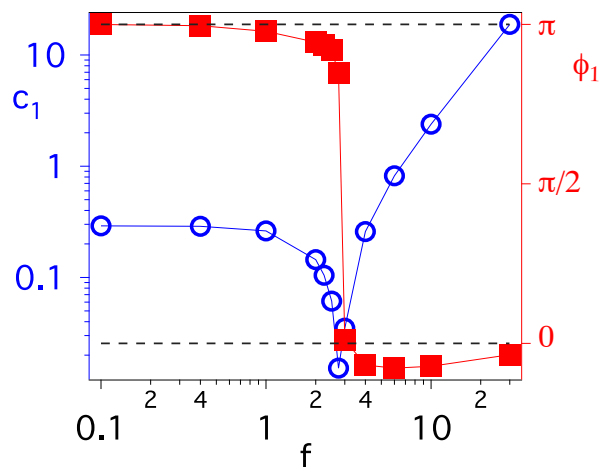


FIGURE 2.25 – Amplitude et phase de la force en régime forcé linéaire ( $A = 5 \times 10^{-5}$ ) pour  $D = 0,81$  et  $Re = 20$ .

La figure 2.25 montre la variation de l’amplitude et de la phase de la force, en régime forcé linéaire, pour un diamètre  $D = 0,81$ . Ces variations sont qualitativement similaires à celles obtenues pour  $D = 0,66$  (voir Fig. 2.11). La valeur de la raideur est nettement plus élevée ( $k = 580$ ) que dans le cas  $D = 0,66$ , et la densité ajoutée est similaire ( $\rho_a(f = 10) = 2,3$ ), et donc la masse ajoutée est un peu plus grande. La fréquence de résonance est plus grande, parce que l’augmentation de la raideur  $k$  est plus forte que celle de la masse ajoutée. La variation du seuil en fonction du diamètre reste à étudier.

## 2.5 Interprétation hydrodynamique du modèle dynamique

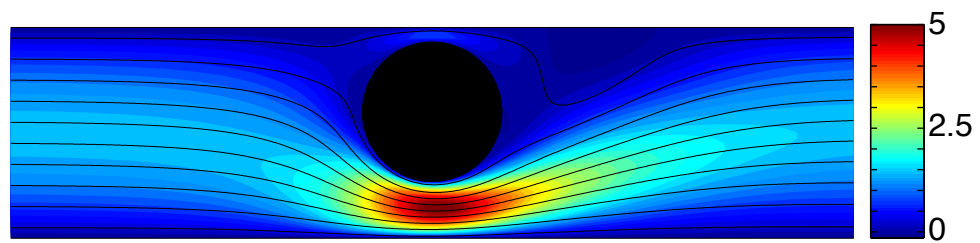
Nous avons montré dans la section précédente que la position  $G_y$  du cylindre obéit à l'équation de Van der Pol (voir Éq. (2.13)). Nous cherchons ici à mieux comprendre l'origine hydrodynamique des termes linéaires de cette équation.

### 2.5.1 Raideur

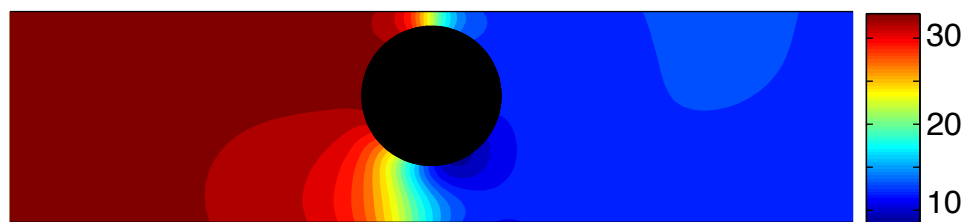
La raideur correspond à la force exercée sur un cylindre fixe décentré, qui tend à le ramener vers le plan médian. Une portance qui tend à repousser un cylindre d'une paroi a déjà été mesurée expérimentalement à grands nombres de Reynolds de l'ordre de  $10^4$  [104]. Pour des nombre de Reynolds modérés ( $2 - 250$ ), L. Zeng [105] a montré numériquement qu'une sphère suffisamment proche d'une paroi subit une portance qui tend à l'en éloigner. Un effet similaire a été présenté par L. Zovatto [52] pour un cylindre confiné entre deux plaques ( $D = 0, 2$ ), à des nombres de Reynolds compris entre 100 et 2000. Le signe de la portance a été attribué par ces auteurs à la dissymétrie amont-aval de l'écoulement, et en particulier à la déflexion du sillage par la paroi en aval du cylindre.

La figure 2.26a présente les lignes de courant et la valeur de la vitesse selon  $x$ , et montre la dissymétrie amont aval de l'écoulement, classique pour un écoulement inertiel. Le champ de pression est présenté dans la figure 2.26b, et la valeur de la pression à la surface du cylindre à la figure 2.26c. La pression est plus forte en haut du cylindre (angles  $\theta$  compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ ) qu'à la position correspondante en bas (en  $360^\circ - \theta$ ) : la force de pression a donc pour effet de repousser le cylindre de la paroi. Comme la force totale est majoritairement due à la composante de pression (voir Fig. 2.12), la portance tend effectivement à ramener le cylindre vers le plan médian des plaques.

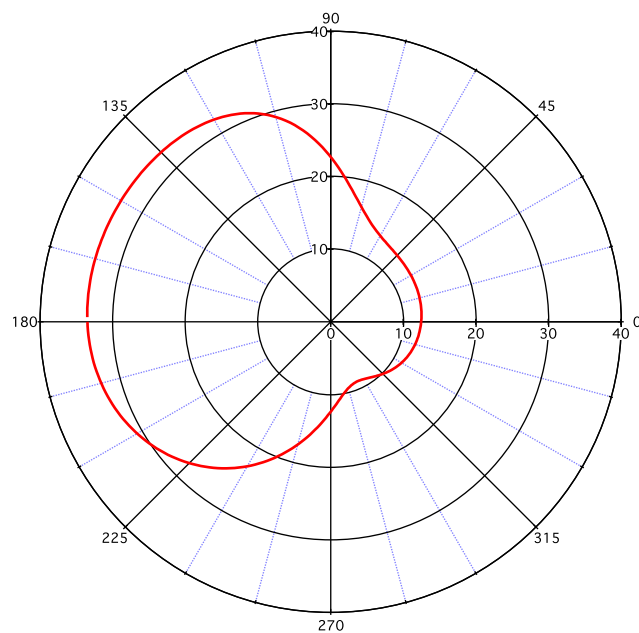
Le champ de pression, représenté en figure 2.26b, peut être interprété (au moins pour un cylindre peu décentré) en considérant les régions de faibles ouverture (voir Fig. 2.27 b), que nous appelons «canaux» dans ce paragraphe. Dans ces canaux, la variation de pression dans la direction de l'écoulement change avec le nombre de Reynolds. Pour les nombres de Reynolds faibles, la variation de la pression est monotone et antisymétrique entre l'amont et l'aval (voir Fig. 2.29c). Pour des nombres de Reynolds plus grands, le profil se dissymétrise, et la chute de pression est plus importante en amont du cylindre qu'un aval (voir Fig. 2.31c, Fig. 2.32c et Fig. 2.33c). La variation de pression est due à la combinaison d'effets visqueux et d'effets inertiels (de type effet Bernoulli). Les effets visqueux tendent à imposer une variation de pression monotone, tandis que les effets inertiels provoquent d'abord une diminution de pression (le fluide accélère) puis une augmentation de pression (le fluide décélère). Il en résulte bien un gradient de pression qui diminue lorsque l'on passe de l'amont vers l'aval. Lorsque le cylindre est décentré vers le haut, la vitesse est plus faible au-dessus du cylindre qu'en dessous (voir Fig. 2.26a), et la longueur caractéristique (distance cylindre-paroi) est plus petite : le nombre de Reynolds dans le canal du haut est plus faible que dans celui du bas. La dissymétrie du gradient de pression entre l'amont en l'aval est donc plus importante en bas qu'en haut, ce qui induit une force de pression vers le bas (la pression loin du cylindre est la même en haut et en bas), comme le montre la figure 2.26b.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.26 – Cylindre fixe de diamètre  $D = 0,66$  à  $Re = 20$ , décentré ( $G_y = 0,1$ ). L'écoulement va de gauche à droite. (a) : code couleur : champ de vitesse selon  $x$ , lignes noires : lignes de courant ; (b) : champ de pression ; (c) : pression à la surface du cylindre en fonction de l'angle polaire. La coordonnée radiale correspond à la valeur de la pression.

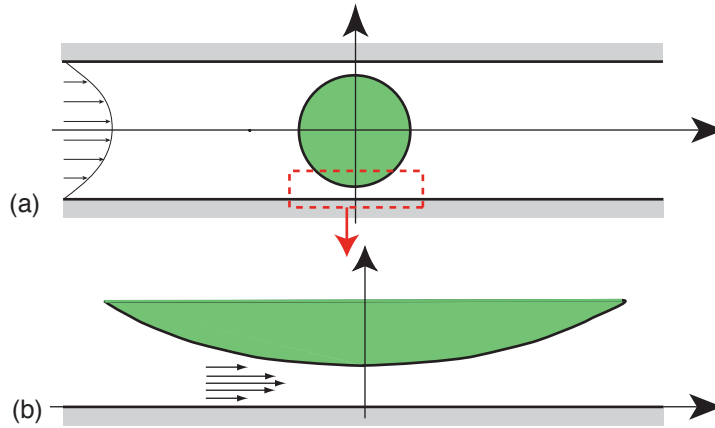


FIGURE 2.27 – Schémas de la géométrie de l'écoulement. (a) : le cadre rouge indique une des deux régions de faible ouverture ; cette région est présentée agrandie en (b).

### 2.5.2 Masse ajoutée

La présence d'une force proportionnelle à l'accélération d'un corps plongé dans un fluide est classique en mécanique des fluides [79, 35, 84]. Cette force est notamment liée à l'accélération du fluide. Il s'agit d'un effet qui existe même pour un écoulement potentiel. Il est possible de calculer simplement la masse ajoutée correspondant à un cylindre confiné entre deux plaques, en mouvement perpendiculairement aux plaques en supposant l'écoulement potentiel et l'absence d'écoulement en entrée (il suffit de résoudre l'équation de Laplace  $\Delta\Phi = 0$  dans le domaine fluide, avec  $\partial\Phi/\partial n = 0$  sur les frontières extérieures du domaine, et  $\partial\Phi/\partial n = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}$  à la surface du cylindre, puis de calculer l'intégrale dans le domaine fluide de  $|\nabla\Phi|^2$ ).

Ce calcul donne une densité ajoutée potentielle  $\rho_a = 1,44$  pour un cylindre situé dans la plan moyen des plaques ( $D = 0,66$ ). Cette valeur est nettement moins élevée que la densité ajoutée  $\rho_a = 3$ , estimée à partir de la fréquence de résonance, et de  $\rho_a = 2$ , estimée à partir des oscillations forcées à  $f = 10$ . La différence entre ces deux dernières valeurs montre que l'écoulement de base change la valeur de la masse ajoutée. Il est possible que l'écart entre ces deux valeurs et la valeur  $\rho_a = 1,44$  soit due au fait que le nombre de Reynolds n'est pas assez élevé pour que le modèle de l'écoulement potentiel soit suffisant. La densité ajoutée à  $f = 10$  diminue en effet avec le nombre de Reynolds (et vaut 1,8 à  $Re = 50$ ). Dans le cas voisin des sphères, il a cependant été montré que la masse ajoutée dépend peu du nombre de Reynolds [106]. L'écart peut aussi être dû à l'écoulement de base. Dans le cas des vibrations induites par l'émission de tourbillons, la masse ajoutée peut également différer de la masse ajoutée potentielle [75].

### 2.5.3 Terme moteur

Dans cette partie, nous cherchons à interpréter le terme qui induit l'instabilité, à savoir  $\alpha_0 \dot{G}_y$ . L'équation 2.11 montre que ce terme correspond à l'écart entre la force pour un cylindre fixe et la force pour un cylindre oscillant à une fréquence faible (le terme de masse ajoutée est négligeable pour une fréquence faible). Comme la force est essentiellement due à la pression (au moins pour les nombres de Reynolds mentionnés dans cette section), nous étudions la perturbation, par rapport au cas d'un cylindre fixe, du champ de pression dû

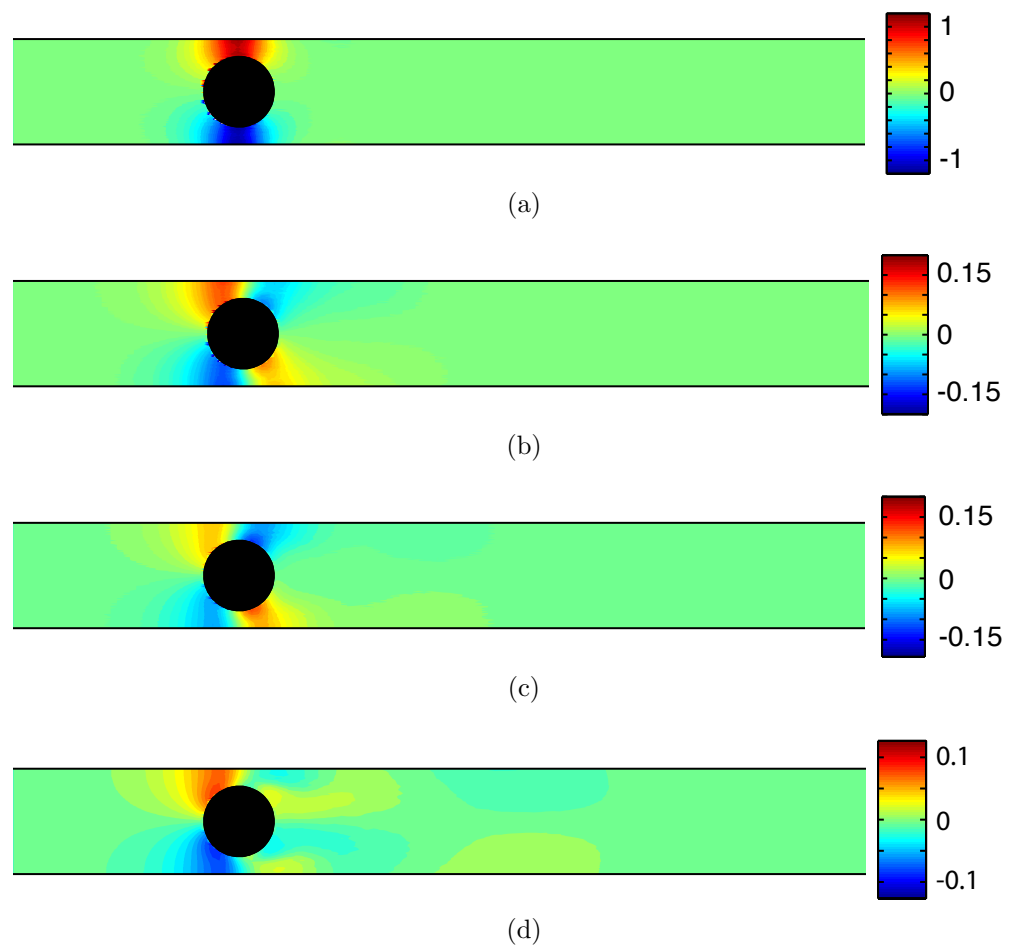


FIGURE 2.28 – Perturbation du champ de pression, lorsque le cylindre se déplace vers le haut, en fonction du nombre de Reynolds. L'écoulement de base va de la gauche vers la droite. (a) :  $Re = 1$  (figure identique à Fig. 2.29f ). (b) :  $Re = 10$  (identique à Fig. 2.31f ). (c) :  $Re = 20$  (identique à Fig. 2.32f ). (d) :  $Re = 50$  (identique à Fig. 2.33f ).

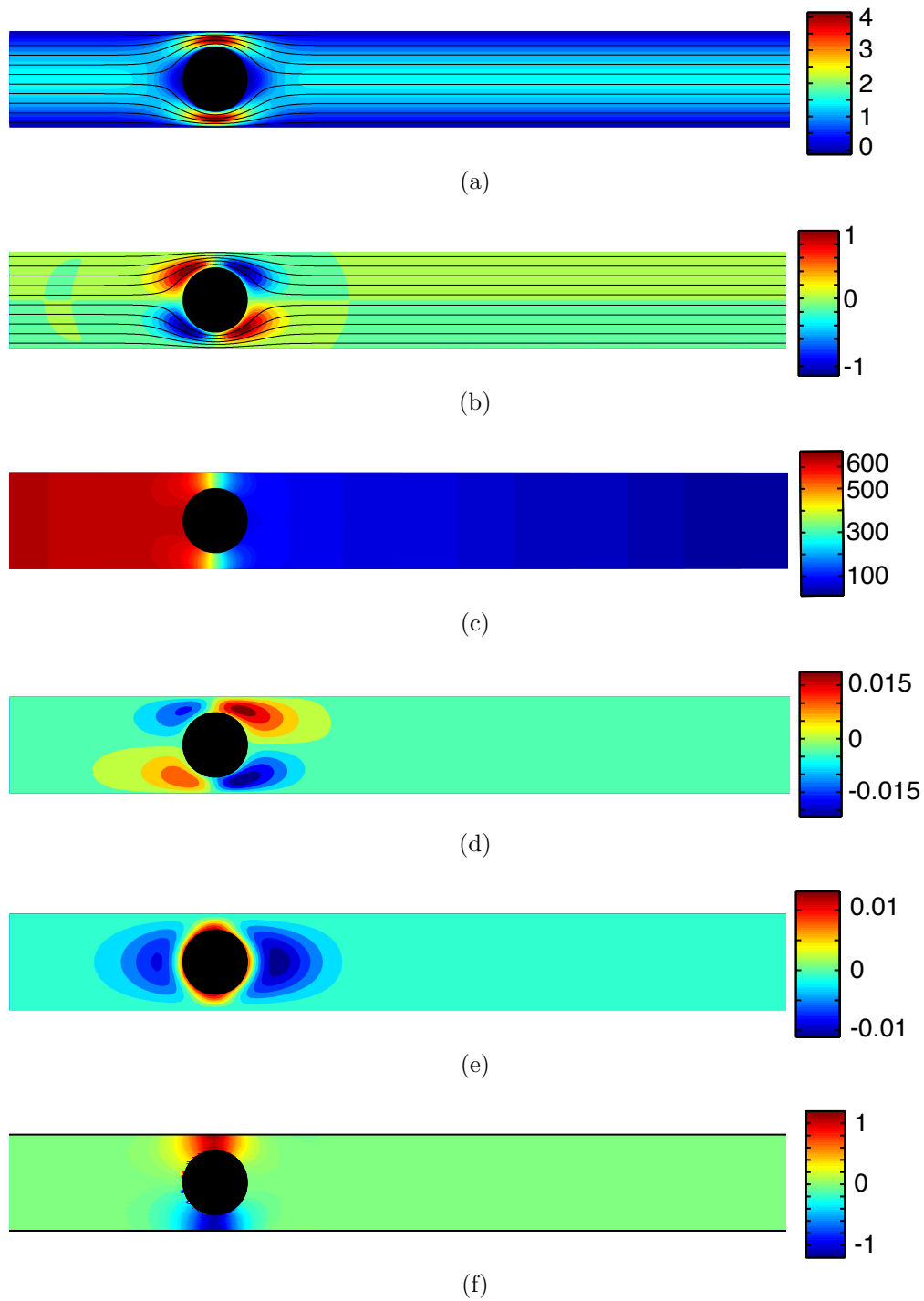


FIGURE 2.29 – Champs de vitesse et de pression à  $Re = 1$  ( $D = 0,66$ ). (a) : vitesse selon  $x$  de l'écoulement de base. (b) : vitesse selon  $y$  de l'écoulement de base. (c) : pression de l'écoulement de base. (d) : perturbation de vitesse selon  $x$ , lorsque le cylindre se déplace vers le haut. (e) : perturbation de vitesse selon  $y$ . (f) : perturbation de pression.

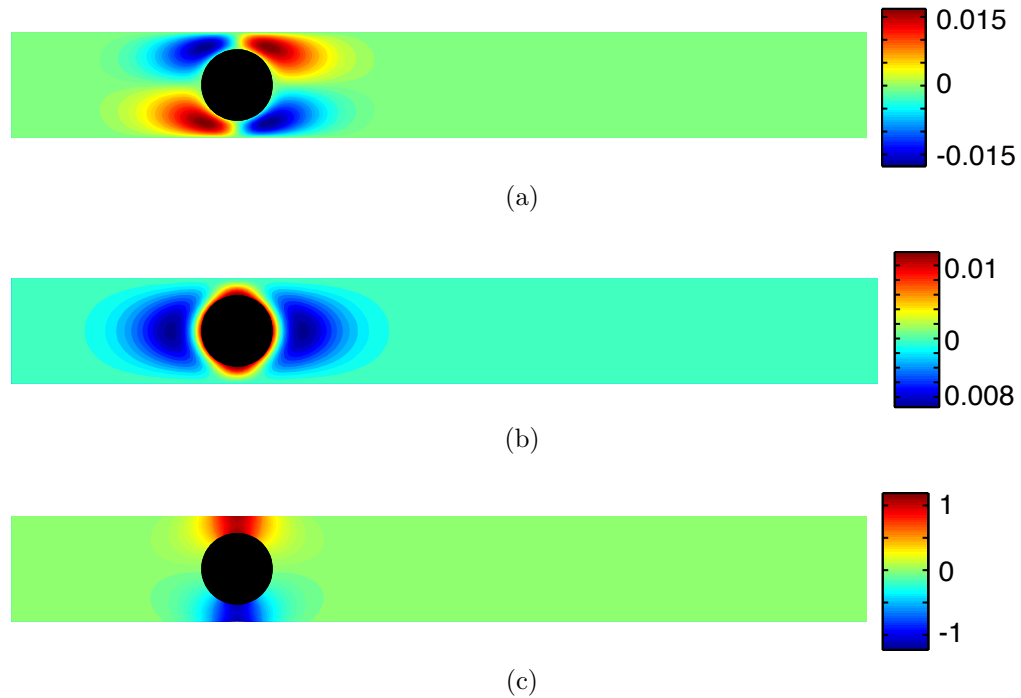


FIGURE 2.30 – Champs de vitesse et de pression à  $Re = 0$  (équation de Stokes) pour un cylindre de vitesse  $V_y = 0,013$  vers le haut, dans un fluide au repos. (a) : vitesse selon  $x$ . (b) : vitesse selon  $y$ . (c) : pression.

à un déplacement à faible fréquence du cylindre. Les champs dits «perturbés» présentés correspondent à l'écart entre les champs lorsque le cylindre est en mouvement vers le haut et lorsque le cylindre est en mouvement vers le bas (nous avons vérifié sur un exemple que les champs résultants sont bien égaux au double de la différence avec les champs pour un cylindre fixé). Nous choisissons un mouvement sinusoïdal de faible amplitude ( $A = 5 \times 10^{-3}$ ) pour que le mouvement du cylindre induise une faible perturbation du champ de vitesse, et une fréquence du mouvement  $f = 0,2$ , soit une vitesse du cylindre vers le haut  $\dot{G}_y = 0,013$ .

La perturbation des champs de pression est présentée dans la figure 2.28, en fonction du nombre de Reynolds. Pour  $Re = 1$ , la pression est plus forte en haut qu'en bas (voir Fig. 2.28a), ce qui induit une force hydrodynamique vers le bas, c'est-à-dire de sens opposé à la vitesse du cylindre. Le coefficient  $\alpha_0$  est négatif, ce qui correspond bien à des oscillations libres amorties. Pour  $Re = 10$ , il apparaît une zone de dépression en haut en aval du cylindre (voir Fig. 2.28b), et une zone de surpression en bas. Cependant, la force hydrodynamique reste dirigée vers le bas, et  $\alpha_0$  reste négatif. Pour  $Re = 20$ , la zone de dépression en haut et la zone de surpression en bas sont suffisantes (voir Fig. 2.28c) pour induire une force hydrodynamique vers le haut. Le coefficient  $\alpha_0$  est positif, la position centrée est instable, et un cylindre libre oscille. Pour  $Re = 50$ , une nouvelle zone de surpression apparaît en haut en aval (voir Fig. 2.28d). La force hydrodynamique est de nouveau orientée vers le bas :  $\alpha_0$  est négatif. Ce résultat est bien cohérent avec les restabilisations observées pour les cylindres de densité élevée, pour  $Re = 50$ . La perturbation du champ de pression permet donc bien d'interpréter le coefficient  $\alpha_0$ .

La suite de cette section a pour but de relier cette perturbation de pression aux champs de base et à la perturbation du champ de vitesse. Sauf pour  $Re = 1$ , il s'agit de résultats

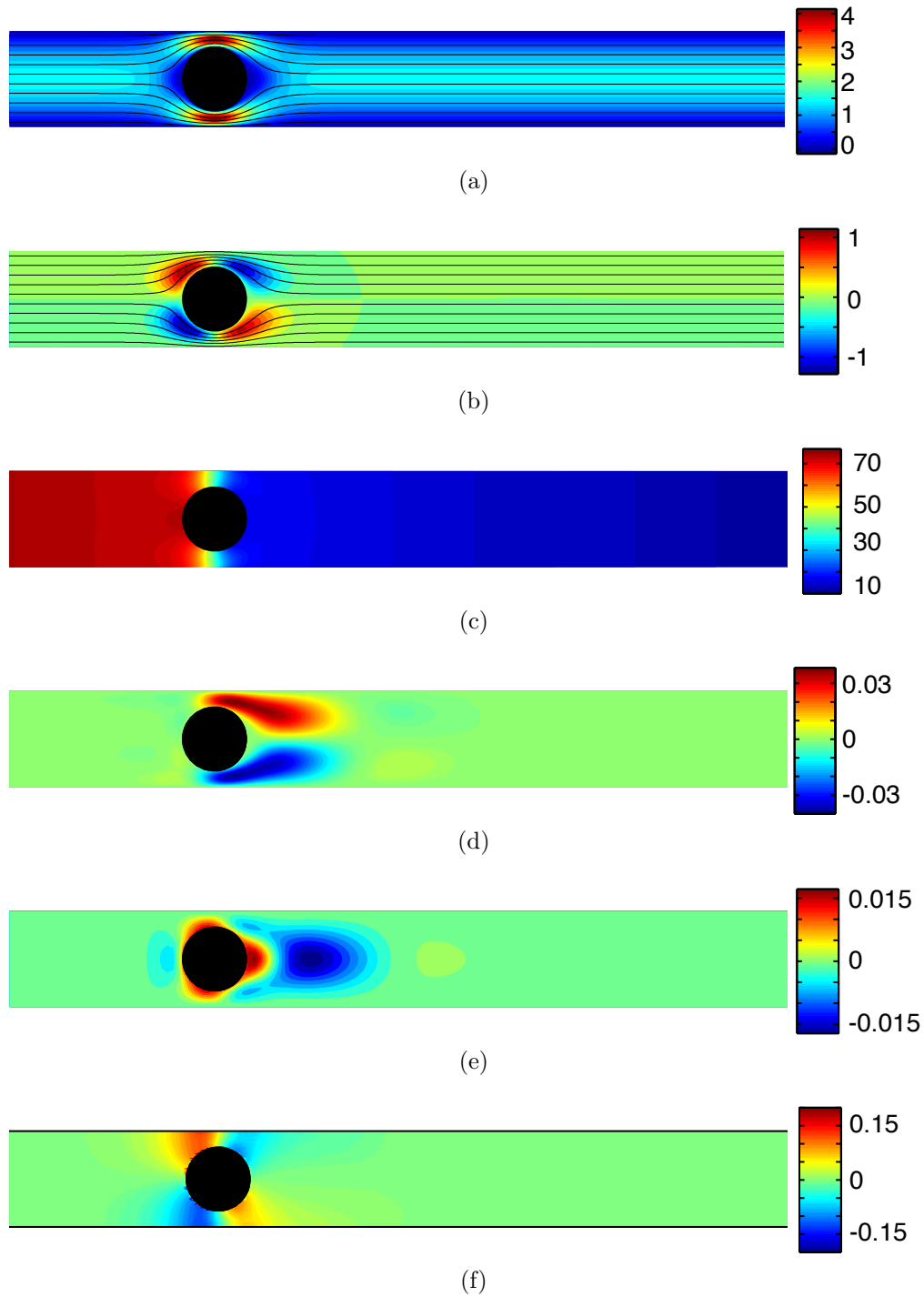


FIGURE 2.31 – Champs de vitesse et de pression à  $Re = 10$ . (a) : vitesse selon  $x$  de l'écoulement de base. (b) : vitesse selon  $y$  de l'écoulement de base. (c) : pression de l'écoulement de base. (d) : perturbation de vitesse selon  $x$ . (e) : perturbation de vitesse selon  $y$ . (f) : perturbation de pression.



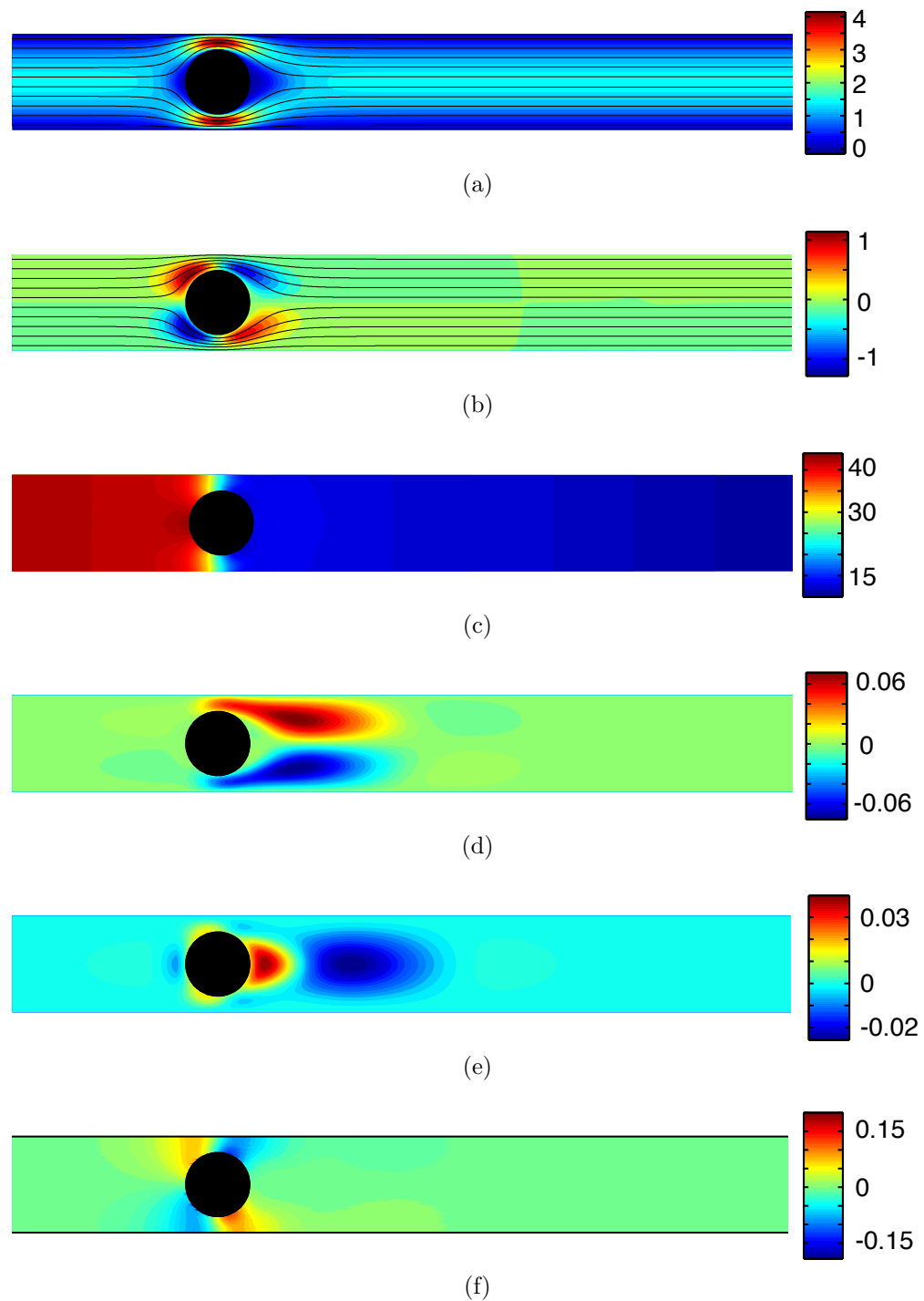


FIGURE 2.32 – Champs de vitesse et de pression à  $Re = 20$ . (a) : vitesse selon  $x$  de l'écoulement de base. (b) : vitesse selon  $y$  de l'écoulement de base. (c) : pression de l'écoulement de base. (d) : perturbation de vitesse selon  $x$ . (e) : perturbation de vitesse selon  $y$ . (f) : perturbation de pression.

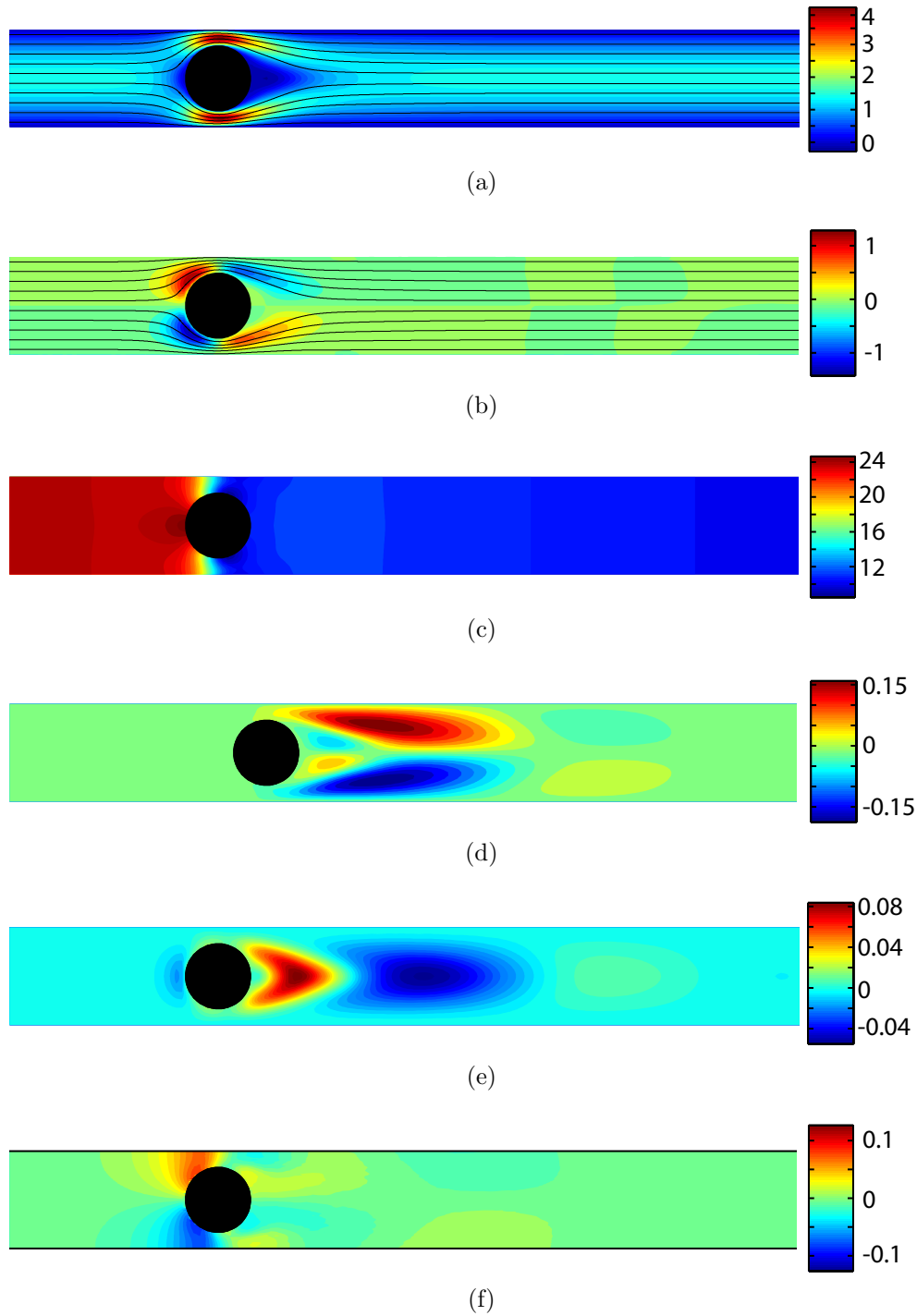


FIGURE 2.33 – Champs de vitesse et de pression à  $Re = 50$ . (a) : vitesse selon  $x$  de l'écoulement de base. (b) : vitesse selon  $y$  de l'écoulement de base. (c) : pression de l'écoulement de base. (d) : perturbation de vitesse selon  $x$ . (e) : perturbation de vitesse selon  $y$ . (f) : perturbation de pression.

préliminaires.

La figure 2.29 présente les champs obtenus pour un nombre de Reynolds faible,  $Re = 1$ , pour lequel la position  $G_y = 0$  est stable ( $\alpha_0$  est négatif). Les champs de base et les champs perturbés sont (quasiment) symétriques (ou antisymétriques), comme attendu dans ce régime. Pour un nombre de Reynolds nul, les champs perturbés sont égaux aux champs obtenus pour un cylindre avec la même vitesse vers le haut, en l'absence d'écoulement de base (comparer les figures 2.30 avec les figures 2.29d, 2.29e et 2.29f). Il s'agit d'une conséquence de la linéarité des équations de Stokes : il n'y a pas de couplage entre l'écoulement de base et l'écoulement dû au mouvement du cylindre. La figure 2.29d montre que le mouvement du cylindre tend à expulser le fluide de manière antisymétrique, avec une vitesse comparable à la vitesse du cylindre. La perturbation est localisée au voisinage du cylindre. La figure 2.29e montre que la vitesse du fluide est égale à la vitesse du cylindre à sa surface (à cause de la condition aux limites de non-glissement). Les zones bleues foncées correspondent au mouvement du fluide du haut vers le bas, qui est tel que le fluide éjecté dans le haut est réinjecté vers le bas. En régime de Stokes, le fluide s'écoule des zones de hautes pressions aux zones de basses pressions. Le champ de vitesse perturbés est bien cohérent avec la surpression en haut du cylindre et la dépression en bas observées dans la figure 2.29f.

Les figures 2.31 donnent les mêmes champs pour  $Re = 10$ . Les champs de base (voir Fig. 2.31a, Fig. 2.31b et Fig. 2.31c) présentent une faible dissymétrie entre l'amont et l'aval, due à l'inertie du fluide, et une faible différence avec les champs correspondant au cas visqueux (voir Fig. 2.29). La zone où la vitesse est perturbée est ainsi plus longue en aval qu'en amont (voir Fig. 2.31a), ce qui est similaire au cas d'un cylindre non confiné à nombre de Reynolds modéré. Les perturbations du champ de vitesse (voir Fig. 2.31d, Fig. 2.31e et Fig. 2.31f) sont très nettement dissymétriques, et diffèrent notablement des champs en régime visqueux (voir Fig. 2.29d, Fig. 2.29e et Fig. 2.29f). Les perturbations de vitesse (voir Fig. 2.31d et Fig. 2.31e) sont essentiellement situées en aval du cylindre, et atteignent des valeurs nettement supérieures à la vitesse du cylindre. Cette forte dissymétrie est due à l'interaction entre l'écoulement de base et le mouvement du cylindre (due au terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes). La perturbation du champ de pression est clairement différente de celle observée dans le cas  $Re = 1$  (comparer Fig. 2.31f et Fig. 2.29f). En aval, une zone de basse pression apparaît en haut, et une zone de haute pression en bas. Ces zones n'existent pas en régime de Stokes, et sont donc dues à un effet inertiel. Il est possible qu'elles puissent être interprétées comme étant un effet Bernouilli, puisque la vitesse du fluide augmente (resp. diminue) fortement en aval en haut (resp. en bas). Par contre, la zone en amont semble être un «résidu» du régime de Stokes.

Les figures 2.32 donnent les champs pour  $Re = 20$ . La dissymétrie est plus marquée que pour  $Re = 10$ , la vitesse maximale du champ de vitesse perturbé est encore plus importante (voir Fig. 2.32d), et la valeur de la perturbation de pression dans la zone de basse pression en haut en aval du cylindre est plus importante (en valeur absolue) que la valeur de la zone de surpression en amont.

Pour  $Re = 50$  (voir Fig. 2.33), les champs de base sont très dissymétriques, et une recirculation est visible derrière le cylindre (voir Fig. 2.33a, Fig. 2.33b). La vitesse maximale du champ perturbé est plus de 10 fois plus grand que la vitesse du cylindre (voir Fig. 2.33d). Une recirculation apparaît également dans le champ perturbé (voir Fig. 2.33d et Fig. 2.33e). La perturbation de pression présente de nouvelles structures derrière le cylindre, au même endroit que les changements de signe de  $V_x$  (voir Fig. 2.33d).

Dans cette section, nous avons montré que le signe du coefficient  $\alpha_0$  peut être relié à la perturbation, par rapport au cas d'un cylindre fixe, du champ de pression qu'induit

le mouvement du cylindre. En régime de Stokes, nous avons relié cette perturbation du champ de pression à la perturbation de vitesse. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, la perturbation de pression change de signe en aval du cylindre. Nous avons émis l'hypothèse que ce changement de signe est dû à un effet de type Bernoulli, ce qu'il reste à vérifier quantitativement, en comparant la perturbation de pression avec celle qui peut être calculée à partir du champ de vitesse (et de l'équation de Bernoulli). De même, le lien entre l'apparition de nouvelles structures dans la perturbation de pression à  $Re = 50$  est l'apparition d'une cellule de recirculation doit aussi être confirmée, par exemple en étudiant des nombres de Reynolds intermédiaires entre 20 et 50.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré expérimentalement et numériquement qu'un cylindre confiné entre deux plaques, soumis à un écoulement stationnaire, peut osciller spontanément. Cette oscillation sinusoïdale se produit lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à un nombre de Reynolds seuil d'environ 20 (en-dessous de ce seuil, le cylindre a une position stable à mi-distance des plaques). Lorsque le nombre de Reynolds est successivement augmenté puis baissé, la variation de l'amplitude et de la fréquence en régime permanent ne fait pas apparaître d'hystérésis. L'amplitude augmente avec le nombre de Reynolds et sature à cause des parois, la fréquence augmente sans saturer. Les valeurs de l'amplitude et de la fréquence obtenues expérimentalement et numériquement sont raisonnablement en accord.

L'existence d'un seuil de l'instabilité implique que l'inertie du fluide est un ingrédient nécessaire de celle-ci. Le couplage entre le mouvement du cylindre et celui du fluide est également essentiel. En effet, l'écoulement derrière un cylindre fixe est stationnaire aux nombres de Reynolds et pour la géométrie considérés. De manière notable, l'oscillation est ainsi observée pour des nombres de Reynolds inférieurs à la valeur seuil de l'émission de tourbillons de Bénard-Von Kármán derrière un cylindre fixe, au contraire de la plupart des oscillations de cylindres dans un écoulement déjà étudiées. Par contre, ni l'inertie du cylindre ni une force extérieure de rappel n'est nécessaire. En particulier, un cylindre peut osciller, même s'il est de masse nulle ou s'il n'est pas soumis à la gravité.

Le caractère sinusoïdal des oscillations et l'existence d'un seuil suggèrent de décrire l'ensemble du cylindre et de l'écoulement comme un système dynamique faiblement non-linéaire. Pour déterminer celui-ci, nous avons forcé (numériquement) les oscillations à des amplitudes et à des fréquences différentes de celles des oscillations libres, et mesuré les forces hydrodynamiques s'exerçant sur le cylindre. En forçant les oscillations, nous avons montré de manière *directe* que la position du centre du cylindre vérifie une équation de Van der Pol. Il en résulte que la bifurcation associée à cette instabilité est une bifurcation de Hopf supercritique, quelle que soit la densité  $\rho_s$  du cylindre. La valeur du seuil dépend, elle, de  $\rho_s$  : elle est d'autant plus faible que  $\rho_s$  (et donc l'inertie du cylindre) est importante (en l'absence de gravité).

Nous avons ensuite cherché à donner une interprétation hydrodynamique des coefficients de l'équation de Van der Pol. Le terme de raideur est lié à la portance qui s'exerce sur un cylindre *fixe* décentré, qui tend à le ramener au centre. L'existence d'une telle force évidemment exclue pour un cylindre non-confiné et elle était déjà connue dans le cas confiné [52]. Dans notre configuration, nous interprétons cette force de rappel par une dissymétrie entre les variations de pression entre le haut et le bas du cylindre. Le terme de masse ajoutée est

classique en hydrodynamique. Il est notamment dû à l'accélération du fluide que le cylindre déplace. Comme dans le cas des vibrations par émission de tourbillons [75], il est probable que d'autres structures de l'écoulement induisent une composante en phase avec l'accélération, ce qui pourrait expliquer la variation de la masse ajoutée avec la fréquence. Le terme moteur, qui est responsable de l'instabilité, a commencé à être étudié en régime linéaire. Nous avons montré que ce terme est liée à la perturbation du champ de pression, lorsque le cylindre est forcé d'osciller à basse fréquence et faible amplitude. La variation de la perturbation du champ de pression avec le nombre de Reynolds induit un changement de signe du coefficient  $\alpha_0$  du terme moteur. Pour un nombre de Reynolds nul, la linéarité de l'équation de Stokes découple l'écoulement base et la perturbation : le mouvement du cylindre ne permet pas d'extraire d'énergie de l'écoulement de base. Cette remarque confirme que l'inertie du fluide est essentielle. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, la perturbation du champ de pression peut s'interpréter en partie à partir des perturbations des champs de vitesse et l'utilisation du théorème de Bernouilli. Il semble néanmoins que des effets visqueux ou des effets liés à des recirculation aient également une influence, comme le suggère la restabilisation des cylindres de densités élevées à haut nombre de Reynolds (une restabilisation a aussi été observée pour un cylindre non-confiné en-dessous du seuil de Bénard-Von Kármán [97]).

Par rapport aux travaux antérieurs, notre étude se caractérise notamment par le confinement du cylindre et par la faible valeur du nombre de Reynolds pour laquelle nous observons l'instabilité. Il serait intéressant de faire le lien avec les autres études, en conservant la même géométrie mais en augmentant le nombre de Reynolds au-delà du seuil de l'instabilité de Bénard-Von Kármán. D'autre part, la réalisation de l'expérience avec des cylindres de diamètres différents permettrait de quantifier le rôle du confinement et de faire le lien avec les cylindres non-confinés.



# Chapitre 3

## Mesure de la forme d'un fil

### 3.1 Introduction

Lors des expériences où un fil se déforme, comme par exemple dans les expériences de transport d'un fil par un écoulement, nous suivons la déformation en acquérant des images (voir introduction). À partir de ces images, nous souhaitons mesurer en tout point la position, l'angle et la courbure de la *ligne moyenne* du fil. Ces grandeurs sont essentielles à toute modélisation mécanique. Il est en effet nécessaire de connaître la position et l'angle du fil par rapport à l'écoulement pour en déduire les forces qu'il subit (voir chapitre 1). La variation de la courbure du fil entre son état libre de contraintes et son état actuel est ainsi reliée au moment fléchissant, résultant des actions de fluide sur le fil (voir annexe A).

Dans un premier temps, nous avons utilisé une méthode classique de seuillage pour déterminer la forme du fil, puis nous avons calculé la courbure en effectuant un ajustement local par un polynôme et en calculant les dérivées de celui-ci. La technique de seuillage est peu robuste, en particulier si l'éclairage est non uniforme ou bruité : il est souvent difficile d'extraire la totalité du fil. Par exemple, un seuillage trop bas donne une collection de pixels discontinus, et un seuillage trop haut inclut des pixels du fond.

De plus, l'ajustement des points issus du seuillage est délicat. Il faut tout d'abord choisir le nombre de pixels sur lequel nous effectuons l'ajustement : si ce nombre est trop faible, la courbure est peu fiable car nous ajustons presque une droite ; s'il est trop grand, nous n'obtenons qu'une grandeur moyenne. D'autre part, cette méthode est peu précise, comme nous le vérifierons en section 3.5.4.

L'insuffisance de cette technique peut s'expliquer. Nous cherchons en effet à déterminer la courbure, qui est essentiellement une dérivée seconde de la position, à partir d'une image expérimentale, qui est une donnée discrétisée (pixelisée) et souvent bruitée. Il est connu qu'une dérivation numérique donne des résultats aberrants, lorsqu'elle est effectuée sans précaution [107]. Effectuer un traitement en deux étapes, seuillage puis ajustement, conduit à mesurer la courbure sur une donnée beaucoup plus pauvre que l'image initiale, car issue du seuillage.

Comme la technique de seuillage est insuffisante, nous avons cherché quelles sont les autres méthodes existantes. Nous avons trouvé de nombreuses méthodes d'analyse d'images, qui ont été développées pour extraire des lignes d'une image. Certaines techniques classiques sont basées sur les transformées de Hough ou de Radon [108, 109, 110, 111, 112] qui consistent à traiter une image de manière à transformer un segment en un point, qui peut alors être aisément détecté par seuillage. Ces méthodes permettent essentiellement de détecter des droites ou des courbes simples (ellipses). Une autre méthode consiste à suivre

la ligne d'intensité maximale («ridge methods») en utilisant le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre du Hessien de l'image lissée [113]. Les méthodes les plus performantes pour les lignes courbes sont les méthodes de type recherche de chemin minimal [114, 115, 116] et lignes de niveau («level set») [117, 118]. Dans ces méthodes, une ligne se déplace dans un potentiel défini à partir des niveaux de gris de l'image. La ligne extraite est celle qui minimise ce potentiel. Cependant, le résultat de ces méthodes est un ensemble discret de points, comme pour la méthode de seuillage, ou une fonction définie implicitement (méthode de type ligne de niveau). Comme dans la méthode de seuillage, l'angle et la courbure sont mesurés par ajustement, et les problèmes restent similaires à ceux du seuillage.

Nous avons donc développé une nouvelle méthode de traitement d'image, nommée VIC («Virtual Image Correlation»), qui permet d'obtenir de manière analytique la position, l'angle et la courbure d'un fil, même à partir d'une image bruitée. Cette méthode, implantée sous Matlab, utilise directement toute l'information disponible, à savoir les niveaux de gris de chaque points du fil. Elle comporte deux étapes.

Tout d'abord, nous extrayons la forme du fil de manière discrète, en ajustant le fil par une suite de petites poutres rectangulaires. Le résultat de cette première étape est une estimation polygonale de la forme du fil.

Lors de la deuxième étape, nous construisons une image d'un fil virtuel, défini de manière analytique à partir de la courbure de sa ligne moyenne (au début du processus, la courbure du fil virtuel est différente de celle du fil physique). Ce fil virtuel est initialisé à partir du résultat de la première étape. Il est ensuite déformé, de manière itérative, jusqu'à ce être le plus proche possible du fil physique. Numériquement, la proximité entre le fil virtuel et le fil physique est quantifiée par la distance quadratique entre les images physique et virtuelle<sup>1</sup>. La forme optimale du fil virtuel est obtenue en minimisant cette distance. Ceci revient à ajuster l'image physique par le fil virtuel. La position, l'angle et la courbure recherchés (ceux du fil physique) sont définis comme ceux du fil virtuel optimisant l'ajustement. La définition analytique du fil virtuel fait que nous identifions simultanément la position, l'angle et la courbure, et que ceux-ci sont de classe  $C^\infty$ .

La méthode que nous avons développé repose sur la corrélation entre l'image physique et une image virtuelle. Les méthodes de corrélation d'image sont largement utilisées en mécanique, car elles permettent de mesurer des champs de déplacement de manière non-intrusive.

En mécanique des fluides, la corrélation d'image constitue le cœur de la méthode de vélocimétrie par images de particules (PIV) [119, 120]. Cette méthode permet d'obtenir le champ de vitesse dans un écoulement. Expérimentalement, il faut ensemenner le fluide de petites billes, et prendre deux images successives de l'écoulement. L'image est divisée en sous domaines (taille typique :  $16 \times 16$  pixels) qui doivent contenir plusieurs billes et correspondre à une échelle de longueur où l'écoulement est approximativement constant. Dans chaque sous domaine de l'image, la PIV consiste à trouver la valeur du déplacement de la seconde image qui donne la corrélation optimale entre les deux images.

La PIV a inspiré les techniques de DIC («Digital Image Correlation») utilisés en mécanique des solides [121, 122, 123, 124]. Elle consiste à trouver la corrélation optimale entre une image d'un solide non contraint, qui sert d'image de référence, et une image du même solide après l'application d'un chargement. Cette méthode donne le champ de déplacement dû au chargement, sans nécessiter de dérivation. Cette technique fonctionne uniquement si le niveau de gris de la surface du solide est non uniforme (sans quoi il n'y a pas de différence

1. «L'image virtuelle» et «l'image du fil virtuel» désignent bien sûr la même entité.



entre les deux images). Les paramètres du champ à ajuster peuvent être choisis sur une base d'éléments finis ou sur une base de solutions analytiques.

Par rapport à la DIC (et à la PIV), nous avons introduits deux nouveautés. Tout d'abord, nous étudions un objet allongé de type fil, et pas une surface texturée (la texture est liée aux petites billes dans le cas de la PIV). Ceci implique que nous devons gérer des déplacements importants et non pas infinitésimaux. De plus, nous ne pouvons pas nous appuyer sur la texture du fil, puisque celle-ci est invariante par translation (le diamètre du fil n'est que de quelques pixels, une texture éventuelle ne serait pas résolue). D'autre part, nous corrélons l'image physique avec une image virtuelle et pas avec une image physique de référence (comme pour la DIC ou la PIV), qui serait d'ailleurs difficile à définir pour un fil très souple.

Afin d'expliquer les principes de la méthode, nous commencerons par présenter le cas des images 1D (section 3.2). Nous présentons la méthode d'extraction discrète en section 3.3. Ensuite, en section 3.4, nous expliquons comment construire le fil virtuel et puis la stratégie d'optimisation qui permet de rapprocher le fil virtuel du fil physique. Nous validerons la robustesse et la précision de la méthode sur des exemples d'images synthétiques dans la section 3.5. Enfin, nous montrerons dans la section 3.6 des applications concrètes de la méthode à des images expérimentales, comme celle d'une tige en aluminium fléchissant sous son propre poids, celle d'un fil transporté par un écoulement dans une fracture ainsi que celle d'un panache thermique.

## 3.2 Cas unidimensionnel

Nous présentons d'abord les principes de la méthode VIC en l'appliquant à des images 1D. Nous estimons ensuite la précision de la méthode en fonction des caractéristiques de l'image physique et de l'image virtuelle. Nous montrerons notamment qu'il est possible en général de retrouver la position du centre du fil avec une précision sub-pixel.

### 3.2.1 Principe de la corrélation entre une image physique et une image virtuelle

Nous choisissons comme exemple d'image physique  $F$  une coupe unidimensionnelle d'une image d'un fil de cuivre sur un fond noir (voir Fig. 3.1b). Dans la suite de la section, nous normaliserons à 1 le niveau de gris maximal et nous appellerons image une fonction discrète 1D (0 correspond au noir, 1 au blanc, voir l'exemple Fig. 3.1b).

La méthode VIC nécessite l'introduction d'une image virtuelle. Nous appelons  $g^2$  la version continue de cette image virtuelle, définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi x}{R_g} \right) \right), \quad (3.1)$$

pour  $x \in [-R_g, R_g]$ . Ce profil est inspiré de la forme de l'image physique (voir l'ajustement de Fig. 3.1b); il est représenté en figure 3.2a. L'image virtuelle n'est pas définie en dehors de  $[-R_g, R_g]$ . La valeur choisie pour le rayon  $R_g$  est plus grande, et du même ordre de grandeur, que la largeur (en pixels) du fil.

Les calculs numériques sont effectués en utilisant la version  $G$  discrétisée en espace de l'image virtuelle (voir Fig. 3.2b). Nous discrétisons  $G$  sur une grille qui est en général plus

---

2. Les notations de ce chapitre n'ont bien sûr aucun rapport avec celles des deux chapitres précédents.

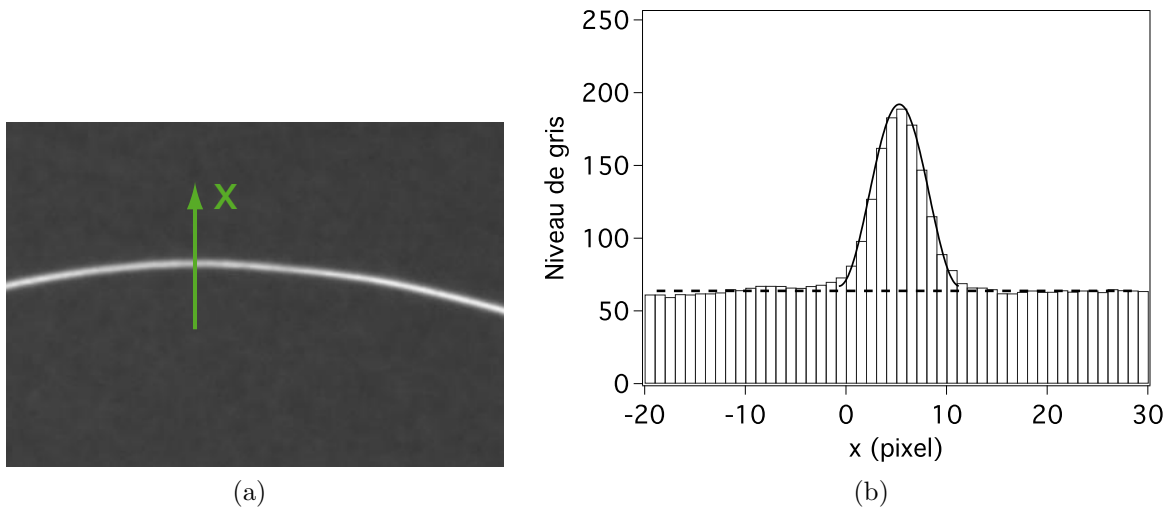


FIGURE 3.1 – (a) : image d'un fil en cuivre (en gris). Le trait vert indique la position de la coupe. (b) : profil discrétisé de niveaux de gris suivant la direction  $x$  de la coupe. Ligne continue : ajustement par  $A(1 + \cos(\pi(x - x_0)/R))/2 + B$ . Ligne pointillée : niveau du fond.

fine que la largeur d'un pixel de l'image  $F$  (dans l'exemple présenté, nous choisissons une discrétisation deux fois plus fine). Le domaine de définition de  $G$  est le même que celui de  $g$ . Les valeurs de  $G$  sont obtenues en calculant la moyenne de  $g$  sur l'intervalle correspondant à chaque pixel. Les niveaux de gris de  $G$  sont codés sur 64 bits (réels de Matlab), ce est beaucoup plus fin que pour une image classique (8 ou 16 bits), et nous négligerons donc les erreurs introduites par ce codage.

La méthode de corrélation nécessite de définir une distance entre deux images. Au niveau continu, nous définissons la distance quadratique<sup>3</sup> entre  $g$  et une image quelconque  $h$  par :

$$\phi = \int_{-R_g}^{R_g} (h(\xi) - g(\xi))^2 d\xi. \quad (3.2)$$

Le principe de la corrélation d'image est de chercher le décalage  $x$  qu'il faut introduire entre les images  $F$  et  $G$  pour minimiser la fonction  $\phi$ . Pour cela, il faut définir la distance entre les images  $F$  et  $G$ , qui ne sont pas *a priori* discrétisées sur la même grille. Pour estimer précisément l'intégrale, nous discrétisons les deux images sur la grille la plus fine, à savoir celle de  $G$ . Nous devons donc estimer la valeur de  $F$  sur la grille fine de  $G$ . Nous pourrions choisir de prendre, à un point donné de la grille fine de  $G$ , la valeur de  $F$  au point le plus proche où elle est définie, mais il ne s'agit pas de la méthode la plus précise (voir section 3.2.3). Nous introduisons ainsi  $F_G$ , qui est obtenue par interpolation cubique de  $F$  aux points de la grille fine où  $G$  est définie (voir Fig. 3.2c).

La méthode de corrélation d'image consiste à trouver la valeur  $x_s$  qui minimise la distance  $\phi(x)$  entre  $G$  et  $F_G$  :

$$\phi(x) = \int_{x-R_g}^{x+R_g} (F_G(\xi) - G(\xi - x))^2 d\xi, \quad (3.3)$$

où l'utilisation du signe  $\int$  est un abus de notation,  $\phi$  étant calculée sur la grille fine associée à  $G$ . La forme de cette fonction  $\phi$  est analogue à la fonction qui est minimisée lors d'un

3. Notons que la forme  $\phi$  n'est pas une distance au sens mathématique du terme, ni même le carré d'une distance, car elle n'est pas symétrique (à cause du domaine de définition qui est celui de  $g$ ).

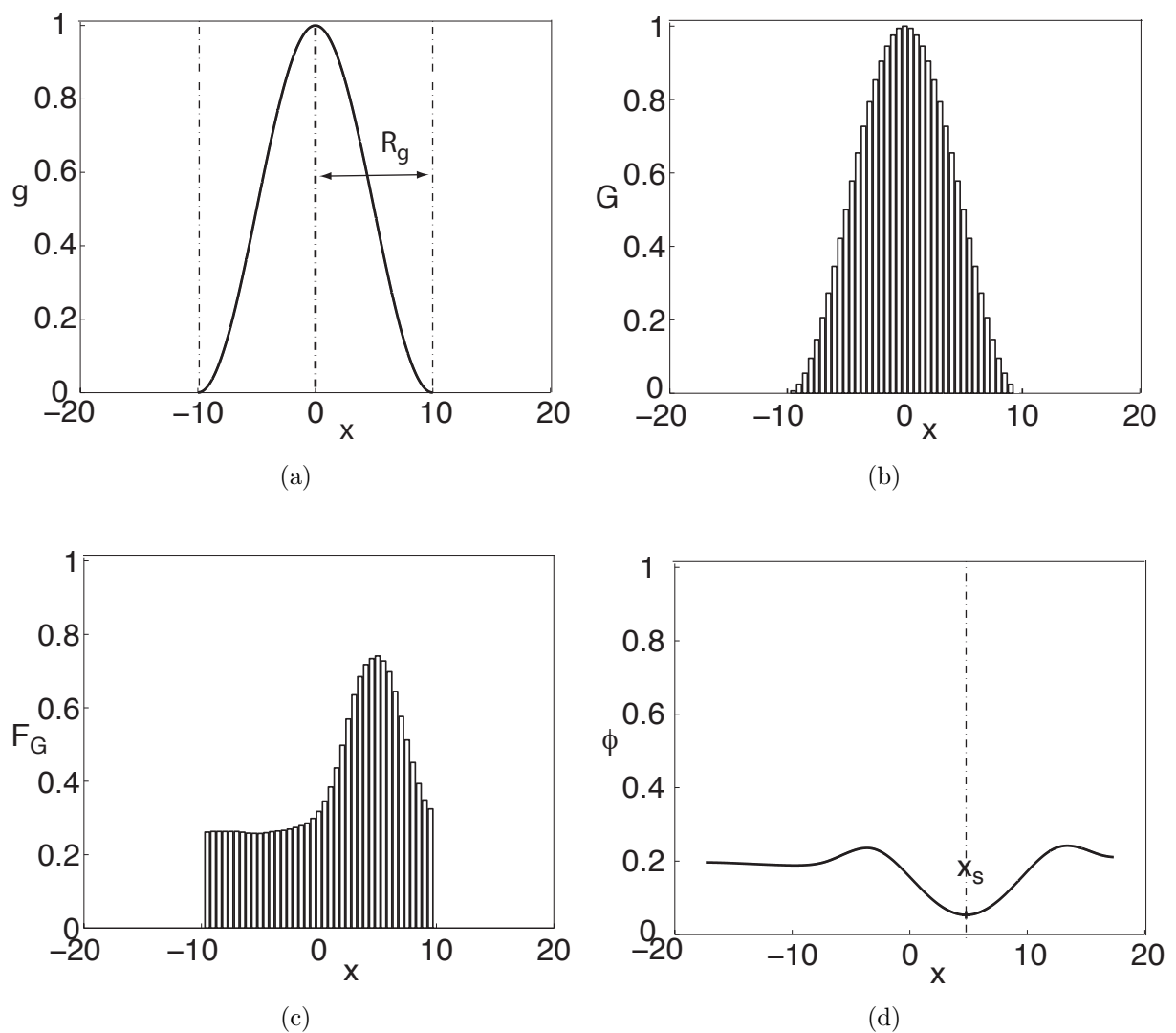


FIGURE 3.2 – Présentation de la méthode dans le cas 1D. Une unité, en abscisse, correspond à un pixel de  $F$  (voir Fig. 3.1b). (a) : image virtuelle continue  $g$ ; (b) : image virtuelle discrétisée spatialement  $G$ ; (c) : image  $F_G$  obtenue par interpolation de l'image physique  $F$  discrétisée sur le maillage de  $G$ ; (d) : fonction de corrélation  $\phi$ .

ajustement par une méthode de moindre carrés. Comme dans cette méthode, le choix de cette distance quadratique est justifiée par sa simplicité [107]. La fonction  $\phi$  est représentée dans la figure 3.2d. Cette fonction est minimale en  $x_s = \arg \min(\phi) = 4,794$  : cette valeur représente l'estimation par la méthode de corrélation d'images de la position du milieu du fil. Elle est qualitativement en accord avec l'allure de la figure 3.1b. Cependant, comme nous ne connaissons pas la «vraie» valeur, nous ne pouvons pas déterminer la précision de la méthode VIC ; la caractérisation de cette précision est l'objet de la section suivante.

### 3.2.2 Précision et robustesse du traitement d'image

La méthode a été testée pour différentes images physiques, afin de montrer qu'elle est précise et adaptée à une large gamme d'images. Nous n'utilisons pas de «vraies» images physiques, mais des images «synthétiques» d'un fil afin de connaître *a priori* la position du centre  $x_0$  (axe de symétrie). Nous pouvons ainsi comparer quantitativement le résultat obtenu par traitement d'image  $x_s$ , pour la position du centre de l'image, avec la position «réelle» du centre de l'image  $x_0$ . Notons qu'il ne faut pas confondre l'image synthétique  $F$ , qui remplace l'image physique en entrée du traitement d'images, avec l'image virtuelle  $G$ , qui est une variable auxiliaire introduite pendant le traitement d'image.

L'image synthétique continue  $f$  est définie par (voir Fig. 3.3a) :

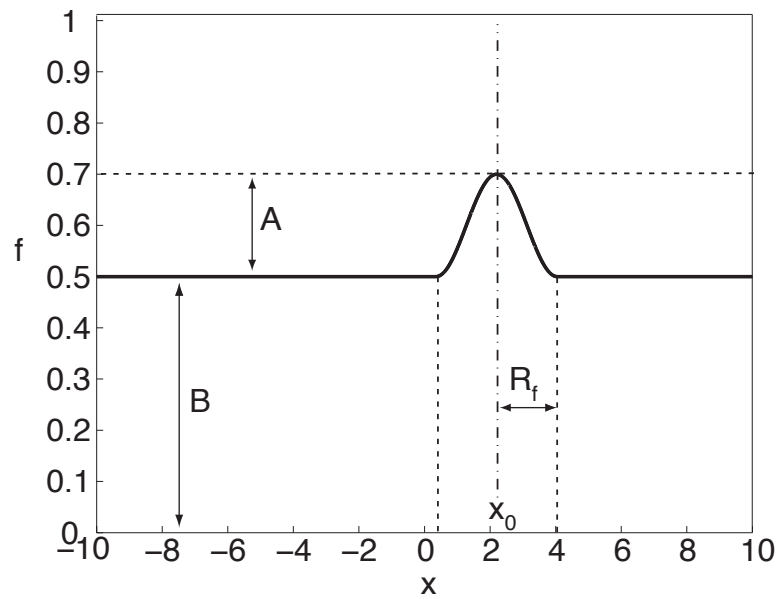
$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{x - x_0}{R_f} \right) \right) + B + N & \text{si } x \in [-R_f, R_f], \\ B + N & \text{si } x \notin [-R_f, R_f], \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $B$  est le niveau du fond,  $N$  le bruit,  $A$  le contraste (écart de luminance entre le fil et le fond),  $R_f$  le rayon du fil de l'image synthétique,  $x_0$  l'axe de symétrie de l'image synthétique.

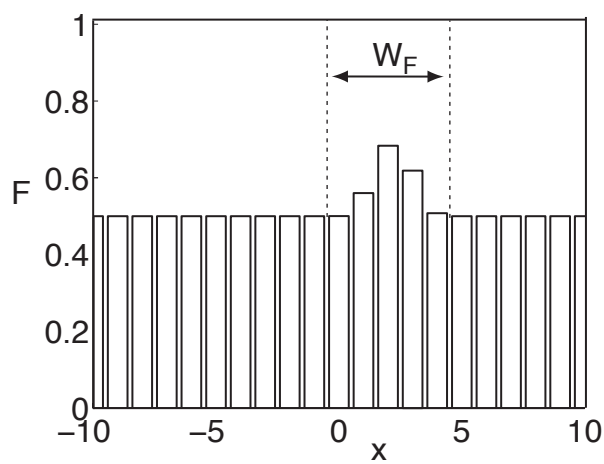
L'information disponible consiste en  $F$  (voir Fig. 3.3b), la version discrétisée spatialement du profil  $f$ , qui est obtenue en calculant la moyenne de  $f$  sur chaque pixel. Dans ce premier exemple, le niveau de gris n'est pas discrétisé sur 8 ou 16 bits, comme pour les images réelles, mais sur 64 bits ; par abus de langage, nous dirons dans ce cas que les niveaux de gris ne sont pas discrétisés. Les valeurs correspondant à ce premier test sont présentées table 3.1.

Alors que le profil de luminance initial  $f$  possède un axe de symétrie en  $x_0 = 2,2$ , l'image discrétisée spatialement  $F$  n'en possède pas. Le cas que nous avons choisi est non trivial car nous avons pris pour  $x_0$  une valeur qui n'est ni entière ni demi-entière ; dans le cas contraire,  $F$  serait symétrique et la position  $x_0$  pourrait être déterminée sans calcul. Le nombre  $W_F$  de pixels de  $F$  qui diffèrent de la valeur du fond est faible (5), et l'effet de la discrétisation spatiale est important. Cette valeur de  $W_F$ , nécessairement entière, est supérieure à la largeur  $2R_f$  de l'image continue  $f$ , parce que la valeur d'un pixel diffère du fond même s'il n'est éclairé que sur une partie de sa largeur. L'image  $F_G$  (voir Fig. 3.3c) n'est pas identique à  $f$  (la perte d'information lors de la discrétisation spatiale est irréversible), et elle ne possède pas non plus d'axe de symétrie.

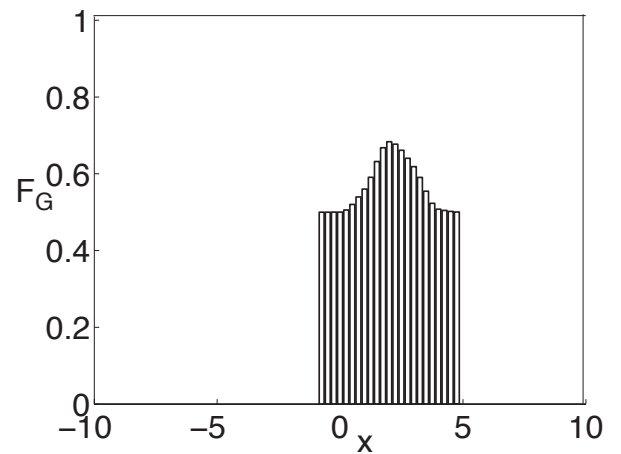
Lorsque nous utilisons la méthode avec les paramètres détaillés ci-dessus, nous trouvons  $x_s = 2,195$ , qui ne diffère de la position  $x_0 = 2,2$  du centre du profil de luminance initial  $f$  que de 0,005 pixels : avec une image où seulement  $W_F = 5$  pixels diffèrent de la valeur du fond, nous obtenons déjà une précision largement meilleure que le pixel. Ce type de précision est courante pour les algorithmes de corrélation d'images [121].



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.3 – Présentation de l'image test de synthèse. Une unité correspond à un pixel de  $F$ . (a) : profil de luminance  $f$ ; (b) : image de synthèse  $F$  obtenue à partir de  $f$ ; (c) : image  $F_G$  interpolée à partir de  $F$ .

TABLE 3.1 – Valeurs par défaut des tests présentés dans la section 3.2.2. Les 6 premières valeurs correspondent aux caractéristiques du fil physique, les 2 dernières à celles de l'image virtuelle.

Position du milieu du profil	$x_0 = 2, 2$ (en pixel de $F$ )
Largeur du fil dans $f$	$2R_f = 3, 7$ (en pixel de $F$ )
Contraste	$A = 0, 2$
Niveau du fond	$B = 0, 5$
Écart-type du bruit	$\sigma_N = 0$
Discrétisation du niveau de gris	non
Largeur de l'image virtuelle	$2R_g = 6$ (en pixel de $F$ )
Nombre de pixels de la grille fine par pixel de $F$	$N_{raf} = 4$

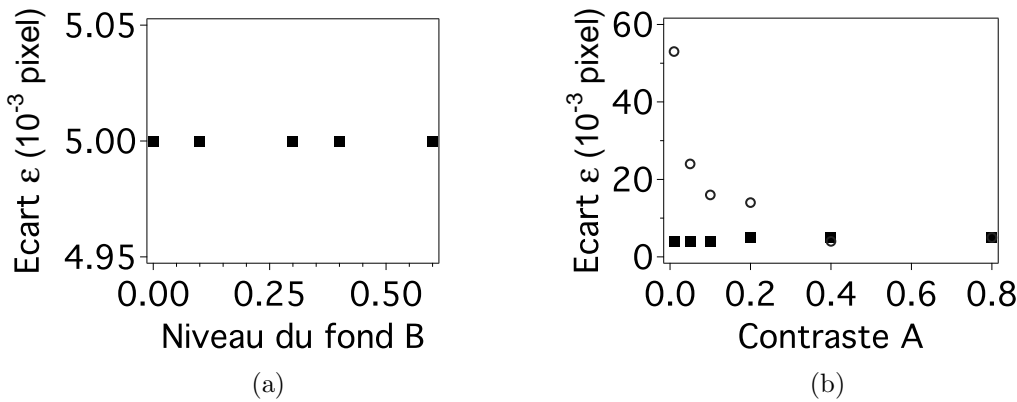


FIGURE 3.4 – Écart  $\varepsilon = |x_0 - x_s|$ . (a) : variation en fonction de la valeur du fond  $B$ ; (b) : variation en fonction du contraste  $A$ . (■) : niveau de gris non discrétisé; (○) : niveau de gris discrétisé (8 bits). Dans ce graphe, la valeur du fond vaut  $B = 0, 1$ .

### 3.2.2.1 Influence du fond, du contraste et de la discrétisation du niveau de gris

Dans cette section, nous étudions l'effet du contraste  $A$  et du niveau du fond  $B$  (voir Éq. (3.4)) sur la précision de la méthode VIC. Par défaut, les valeurs sont celles de la table 3.1, et en particulier le niveau de gris n'est pas discrétisé.

La distance quadratique, définie par l'équation 3.3, peut être réécrite :

$$\phi(x) = \underbrace{\int_{x-R}^{x+R} (F_G(\xi))^2 d\xi}_{I_1} - 2 \underbrace{\int_{x-R}^{x+R} F_G(\xi) G(\xi - x) d\xi}_{I_2} + \underbrace{\int_{-R}^R (G(\xi))^2 d\xi}_{I_3}. \quad (3.5)$$

Si  $x$  est proche de  $x_0$ , comme la largeur de l'image virtuelle  $2R_g$  est choisie plus grande que la largeur du fil physique, le terme  $I_1$  ne dépend pas de  $x$ . Le terme  $I_3$  ne dépend pas non plus de  $x$  : minimiser  $\phi$  revient à maximiser  $I_2$ . La valeur  $x_s$  qui maximise la corrélation doit donc être constante si nous ajoutons une constante à  $F$ , ce qui est bien le cas comme le montre la figure 3.4a. De même, changer le contraste de  $F$  ne doit pas avoir d'influence (cela revient à multiplier  $I_2$  par une constante) si le niveau de gris n'est pas discrétisé, ce qui est bien le cas ((■) de Fig. 3.4b). Par contre, si le niveau de gris est discrétisé sur 8 bits (comme dans une image réelle), l'amplitude a une influence (voir (○) de Fig. 3.4b).

La discrétisation dégrade fortement le signal (niveaux de gris des pixels) si l'amplitude est faible, et par conséquent l'écart  $\varepsilon = |x_0 - x_s|$  augmente alors fortement, mais reste inférieur à 1 pixel. Par contre, si le contraste est suffisant (supérieur à  $A > 0,4$ ), la discrétisation est négligeable et nous retrouvons les mêmes résultats pour  $x_s$  que lorsque le niveau de gris n'est pas discrétisé.

Les résultats présentés montrent que la méthode VIC donne un résultat sub-pixel, même lorsque l'image virtuelle n'a pas le même contraste et le même niveau de fond que l'image réelle. De plus, si la discrétisation des niveaux de gris ne joue pas un rôle majeur, ce qui est en pratique le cas le plus courant, l'écart de contraste et de niveau de fond entre l'image virtuelle et l'image physique n'a aucun effet.

### 3.2.2.2 Influence de la largeur de l'image physique $R_f$

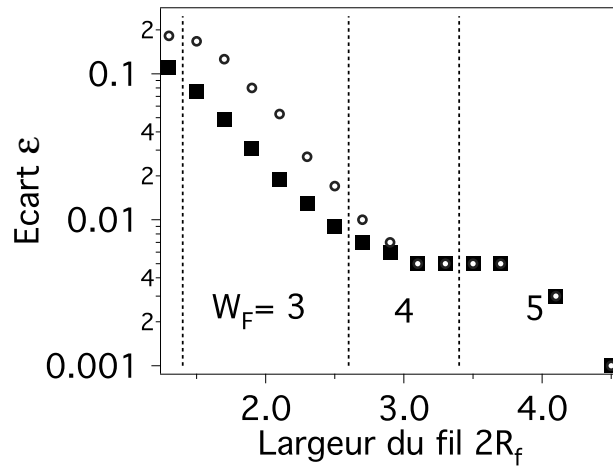
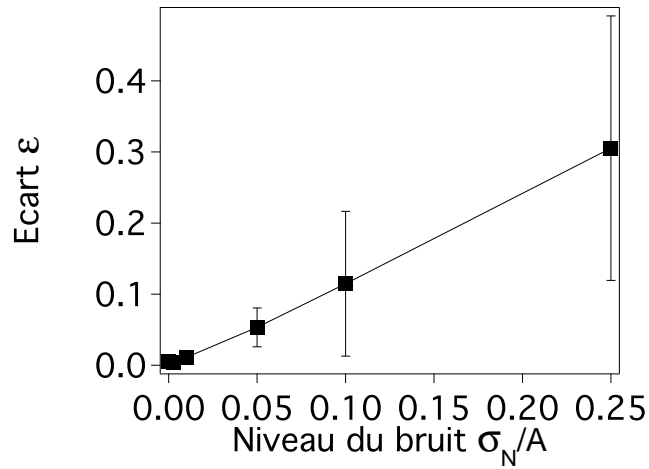


FIGURE 3.5 – Écart  $\varepsilon$  en fonction de la largeur  $R_f$  du profil de luminance  $f$ . Les nombres dans la figure correspondent au nombre  $W_F$  de pixels de  $F$  qui diffèrent du fond. Les deux séries de points correspondent à des paramètres constants différents : (■) :  $R_g/R_f = 6$ , (○) :  $R_g/R_f = 1,6$ .

La figure 3.5 montre la variation de l'écart  $\varepsilon$  en fonction de la largeur  $R_f$  du profil de luminance  $f$ . La précision augmente lorsque la largeur du profil augmente, parce que l'information est contenue dans plus de pixels. L'écart diminue de manière monotone avec la largeur de  $f$ , et il n'y a pas de saut lorsque  $W_F$  (pixels de valeur différent du fond) augmente d'une unité. Les résultats sont qualitativement similaires si la largeur de l'image virtuelle est fixe ( $R_g$  constante), ou si le rapport  $R_g/R_f$  est constant.

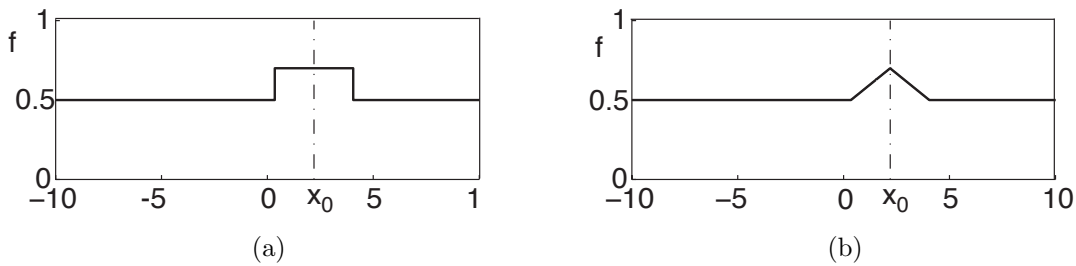
### 3.2.2.3 Influence du bruit

Pour tester l'influence du bruit, nous avons ajouté à  $f$  un bruit gaussien  $N$  de moyenne nulle, d'écart-type  $\sigma_N$ , sans corrélation entre les pixels. Il s'agit du bruit le plus souvent observé pour des images réelles [125, 126]. Nous quantifions ce bruit par  $\sigma_N/A$ , qui est l'abscisse des figures 3.6. Pour chaque jeu de valeurs, nous construisons plusieurs images  $F$ . Sur la figure 3.6, les symboles (■) correspondent à la valeur moyenne de  $\varepsilon$ , et les barres d'erreur à la dispersion de valeur de l'écart  $\varepsilon$ . L'écart moyen  $\varepsilon$  ainsi que son l'écart-type



(a)

FIGURE 3.6 – Écart  $\epsilon$  en fonction du niveau du bruit. Les carrés (■) correspondent à la valeur moyenne de l'écart  $\epsilon$ , l'extrémité des barres correspond à l'écart-type de la valeur de  $\epsilon$ .



(a)

(b)

FIGURE 3.7 – Profils de luminance des images tests de forme différente de celle de l'image virtuelle (a) : rectangulaire; (b) triangulaire.

augmentent linéairement avec le niveau de bruit. Le bruit dégrade fortement la précision de la mesure du milieu du fil, qui reste cependant sub-pixel.

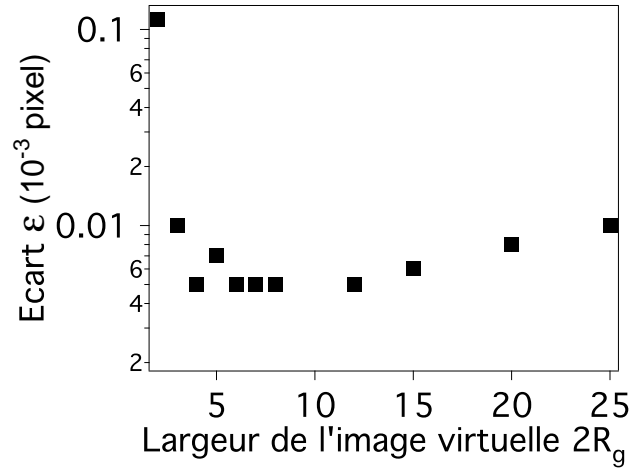
### 3.2.2.4 Influence de la forme du profil de l'image physique

Nous avons testé la méthode VIC pour d'autres profils de luminance  $f$  de l'image physique (voir Fig. 3.7). Nous choisissons uniquement des profils symétriques, pour lesquels le milieu est bien défini. La table 3.2 montre que si le profil de luminance de l'image physique n'est pas un cosinus décalé, l'écart  $\epsilon$  est un peu plus grand mais reste très inférieur au pixel. Cela montre qu'il n'est pas nécessaire que l'image physique ait la même forme que l'image virtuelle pour que l'identification soit sub-pixel.

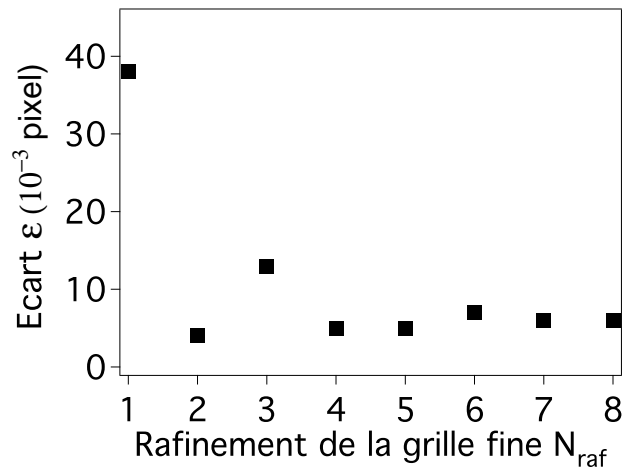
TABLE 3.2 – Valeurs de l'écart  $\epsilon$  pour plusieurs formes de l'image physique.

Forme	cosinus décalé	rectangulaire	triangulaire
$\epsilon$	0,005	0,011	0,012





(a)



(b)

FIGURE 3.8 – (a) : variation de  $\varepsilon = |x_0 - x_s|$  en fonction de la largeur de l'image virtuelle  $2R_g$ ; (b) : variation de  $\varepsilon$  en fonction du nombre  $N_{raf}$  de pixels de la grille fine par pixel de  $F$ .

### 3.2.3 Choix des paramètres de l'image virtuelle

Dans la section précédente, nous avons testé la précision de la méthode pour différentes images physiques. Ces tests nous ont permis d'évaluer la précision de la méthode VIC pour une large gamme d'images physiques, et de montrer que cette précision est généralement sub-pixel, même pour des images bruitées ou dont la largeur ne vaut que quelques pixels, par exemple. Dans cette section, nous cherchons à déterminer pour une image physique donnée qu'elles sont les caractéristiques de l'image virtuelle qui optimisent la précision de la méthode VIC.

D'après la figure 3.8a, l'écart  $\varepsilon$  est important si la largeur de l'image virtuelle est inférieure au nombre  $W_F$  de pixels de  $F$  qui diffèrent du niveau du fond (5). Si la largeur de l'image virtuelle est trop grande, le niveau de gris est quasiment plat là où se trouve l'image physique, et  $\phi$  dépend peu de  $x$  : la méthode devient moins précise. Il faut donc choisir  $R_g$  plus grand et du même ordre de grandeur que la largeur  $R_f$  du fil physique.

TABLE 3.3 – Valeurs de l'écart  $\varepsilon$  pour plusieurs méthodes d'interpolation de  $f$ .

Interpolation	non	linéaire	cubique	spline
$\varepsilon$	0,2	0,05	0,005	0,008

La figure 3.8b présente la variation de  $\varepsilon$  en fonction du nombre  $N_{raf}$  de pixels de la grille fine par pixel de  $F$ . La valeur de  $\varepsilon$  sature rapidement si ce nombre est supérieur à 4. En fait, la valeur de  $\varepsilon$  est déjà satisfaisante pour  $N_{raf} = 2$ , le cas  $N_{raf} = 3$  est spécifique. En effet, la variation non monotone pour la valeur 3 vient du fait que la largeur correspondant au niveau de gris maximal de  $G$  est plus grande pour  $N_{raf} = 3$  que pour  $N_{raf} = 2$ , et que la corrélation est alors moins sensible.

Nous avons également testé l'effet de la manière d'interpoler  $F$  (voir Tab. 3.3). Sans interpolation, nous obtenons  $x_s = 2$ , qui est un résultat à l'échelle du pixel. Les meilleurs résultats sont obtenus avec des interpolations cubique ou avec des splines, qui permettent d'exploiter l'hypothèse de continuité de  $f$ . Nous avons choisi l'interpolation cubique, pour son moindre coût numérique.

### 3.3 Extraction discrète de la forme du fil

Une des étapes de la VIC (à 2D) consiste à minimiser la distance quadratique entre l'image physique et l'image virtuelle (voir section 3.4). Comme le nombre de paramètres qui décrivent le fil virtuel est important, cette minimisation est réalisée par un algorithme itératif, qui recherche un minimum local. Cet algorithme itératif nécessite une initialisation, et celle-ci doit être suffisamment proche de la solution recherchée pour que l'algorithme converge bien vers le minimum global. Cette initialisation est effectuée grâce au résultat de la méthode d'extraction discrète présentée dans cette section.

#### 3.3.1 Principes de la méthode

L'extraction discrète donne une approximation polygonale du fil physique sous forme d'un ensemble de points  $K_m$  ( $0 \leq m \leq M$ ) et d'angles  $\Theta_m$  ( $0 \leq m \leq M - 1$ ). Cette méthode pourrait aussi être utilisée seule, si nous cherchions seulement une approximation de la position.

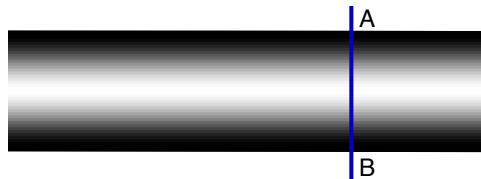


FIGURE 3.9 – Schéma d'une poutre virtuelle obtenue par extrusion de l'image virtuelle 1D. La section droite selon AB correspond à la figure 3.2a

Dans le programme d'extraction de la forme du fil, l'utilisateur donne la position approchée d'une extrémité celui-ci, ainsi que sa direction initiale. Ensuite, le programme construit

une poutre virtuelle rectangulaire obtenue en extrudant<sup>4</sup> l'image virtuelle 1D (voir Fig. 3.2b) selon un segment (voir Fig. 3.9). Le programme cherche la valeur de l'angle  $\theta$  de la poutre virtuelle qui optimise la valeur de sa corrélation avec l'image physique (voir Fig. 3.10). Le processus est répété à partir du centre de cette poutre virtuelle. Lorsque la valeur de la corrélation optimale diminue fortement, cela signifie que le programme a atteint l'extrémité du fil : le programme d'extraction discrète s'arrête alors.

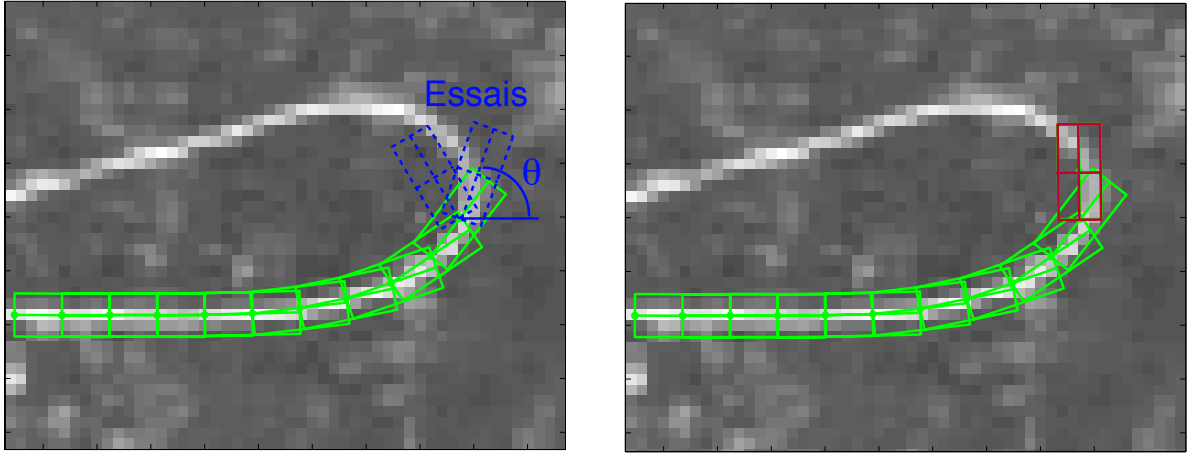


FIGURE 3.10 – Illustration d'une étape de la méthode d'extraction discrète, pour l'image d'un fil dans une fracture. Les rectangles verts correspondent aux poutres virtuelles déjà déterminées et les rectangles bleus à des essais pour la poutre active. L'angle  $\theta$  correspond au degré de liberté de la poutre virtuelle active. Le rectangle rouge correspond à la poutre virtuelle qui optimise la corrélation.

### 3.3.2 Détails de la méthode

Dans cette section, nous définissons la poutre virtuelle, la fonction de corrélation à minimiser et nous expliquons le critère d'arrêt du programme.

La poutre virtuelle  $g$  (voir Fig. 3.9) est définie pour  $(r, \xi) \in D_g = [-R_g, R_g] \times [0, \Delta L]$  par :

$$g(r, \xi) = g(r) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi r}{R_g} \right) \right), \quad (3.6)$$

qui est analogue à l'équation 3.1. La seule différence est que l'image virtuelle utilisée ici est définie sur un domaine  $D_g$  rectangulaire (2D). L'image virtuelle est choisie invariante par translation selon  $\xi$ . La longueur  $\Delta L$  de la poutre virtuelle est laissée au choix de l'utilisateur. La valeur choisie doit être suffisamment grande pour que le bruit soit moyenné et n'influe pas sur le résultat, et suffisamment petite pour pouvoir suivre les zones de grande courbure («virages»); une valeur  $\Delta L = 6R$  donne généralement de bons résultats.

Dans ce paragraphe, nous appelons  $g_m$  la poutre virtuelle après translation au point courant  $K_m$  et rotation d'angle  $\theta$ . Nous appelons  $G_m$  la version discrétisée de  $g_m$ , en général

4. l'extrusion signifie ici que l'image 2D est formée d'images 1D mises une à côté de l'autre; les images 1D sont perpendiculaires à la ligne où se trouvent leurs centres.

sur une grille plus fine que celle de l'image physique  $F$ . Comme dans le cas 1D, l'image virtuelle n'est pas corrélée directement à l'image physique  $F$  mais avec l'image  $F_G$ , obtenue par interpolation cubique de l'image physique aux points de la grille fine associée à  $G_m$ . La fonction de corrélation, analogue au cas 1D (voir Éq. (3.3)), est donnée par :

$$\phi_m(\theta) = \iint_{D_{G_m}} (F_{G_m} - G_m)^2, \quad (3.7)$$

où le signe  $\iint$  est un abus de notation,  $\phi_m$  étant évaluée sur la grille fine associée à  $G$ . Comme il n'y a qu'un paramètre ajustable (l'angle  $\theta$ ), nous minimisons cette fonction  $\phi_m$  numériquement grâce à l'algorithme `fminsearch` de Matlab, initialisé en prenant la valeur de  $\theta$  déterminée à l'itération précédente.

Le critère d'arrêt est lié à  $\delta_m$  :

$$\delta_m = \min \phi_m - \min \phi_{m-1}, \quad (3.8)$$

qui est la variation de la la valeur de la corrélation optimale entre deux itérations. Le programme s'arrête lorsque  $\delta_m$  est nettement plus grand que  $\delta_{m-1}$ , ce qui correspond en général au cas où l'image virtuelle dépasse l'extrémité de l'image physique.

## 3.4 Extraction analytique de la forme

Nous avons vu dans la section précédente 3.3 comment traiter l'image physique pour en extraire le fil, sous forme d'un ensemble d'angles (ceux des petites poutres virtuelles). Malgré ce grand nombre de degrés de liberté, cette base n'est pas satisfaisante : le centre des petites poutres n'est pas exactement sur la ligne moyenne de l'image physique (voir Fig. 3.10 ), et l'angle et la courbure ne sont pas obtenus analytiquement.

Dans cette section, nous expliquons comment le fil virtuel est paramétré, puis comment le résultat obtenu à la section 3.3 permet de l'initialiser. Ensuite, nous présenterons l'algorithme itératif d'optimisation de la corrélation entre l'image physique et l'image virtuelle, qui donne la position, l'angle et la courbure du fil sous forme analytique.

### 3.4.1 Paramétrage du fil virtuel

L'image virtuelle  $g$  s'obtient, comme dans la section 3.3, en extrudant l'image virtuelle 1D (voir Fig. 3.2a ). Cependant, l'extrusion ne se fait plus selon un segment de droite, mais selon une courbe paramétrée  $\mathbf{x}(s)$  qui représente la ligne moyenne du fil virtuel ( $s$  est l'abscisse curviligne le long de la ligne moyenne du fil virtuel). Un schéma de l'image virtuelle est donnée à la figure 3.11, où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  désigne le repère cartésien fixe et  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  les vecteurs tangent et normal à la ligne moyenne.

En considérant  $\mathbf{x}(s)$  comme connu, les points  $\mathbf{X}$  de l'image virtuelle sont donnés par :

$$\mathbf{X}(s, r) = \mathbf{x}(s) + r\boldsymbol{\nu}(s), \quad (3.9)$$

où  $(r, s) \in [-R_g, R_g] \times [0, L]$ , avec  $L$  la longueur du fil et  $R_g$  son rayon. La position  $\mathbf{X}(r, s)$  est effectivement définie de manière unique si le rayon de courbure local de la ligne moyenne  $1/|\gamma(s)|$  est plus grand que le rayon  $R$  du fil virtuel. Cette hypothèse, qui signifie que le fil virtuel est bien un objet allongé et pas un objet 2D, sera toujours faite par la suite. La luminance de l'image virtuelle est donnée par :

$$g(r, s) = g(r) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi r}{R_g} \right) \right), \quad (3.10)$$

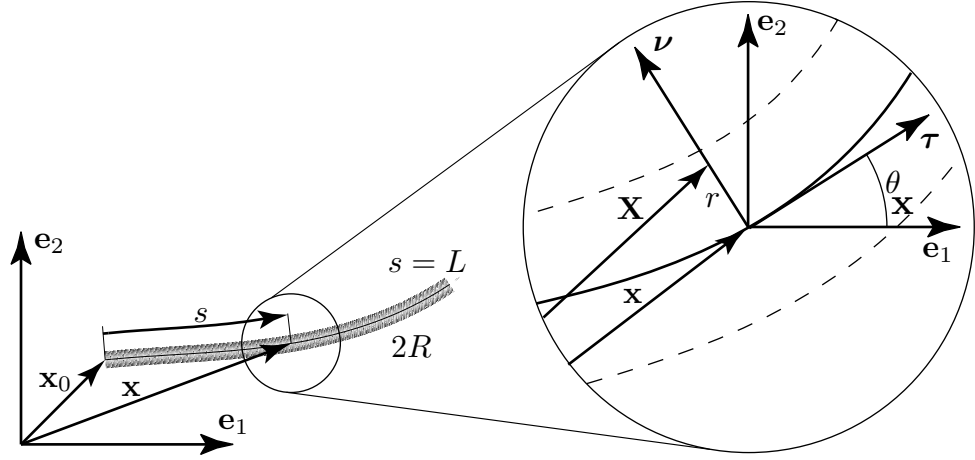


FIGURE 3.11 – Schéma de l'image virtuelle

qui est analogue aux équations (3.1) et (3.6). Comme dans le cas 1D et dans le cas des poutres rectangulaires,  $g$  est discrétisée sur une grille fine plus fine que celle de l'image physique. Dans le programme, l'utilisateur choisit un rayon  $R_g$  de la poutre virtuelle plus grand et du même ordre de grandeur que le rayon du fil physique, comme dans le cas 1D et la méthode discrète.

#### 3.4.1.1 Description continue de la ligne moyenne

Pour paramétrer l'image virtuelle, il faut paramétrer la ligne moyenne, qui constitue la sortie de l'algorithme. La quantité la plus difficile à déterminer que nous cherchons est la courbure du fil : nous paramétrons donc la ligne moyenne par la courbure  $\gamma(s)$ . L'angle et la position s'obtiennent par intégration :

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s \gamma(\xi) d\xi, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_0^s \boldsymbol{\tau}(\xi) d\xi, \quad (3.12)$$

où le vecteur tangent  $\boldsymbol{\tau} = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2$  est connu si l'angle  $\theta$  est connu. L'intégration de l'angle  $\theta(s)$  (voir Éq. (3.12)) est une opération numériquement plus robuste que la dérivation qu'il faudrait effectuer si la ligne moyenne était paramétrée par  $\mathbf{x}(s)$ .

#### 3.4.1.2 Paramétrage discret de la ligne moyenne

Pour discrétiser la description de la ligne moyenne, nous avons choisi d'écrire la courbure  $\gamma(s)$  (dimensionnée) sous la forme d'une série tronquée :

$$\gamma(s) = \sum_{n=0}^N A_n P_n(\tilde{s}), \quad (3.13)$$

où  $A_n$  sont les coefficients de la série,  $N$  l'ordre d'approximation,  $P_n(\tilde{s})$  la base de fonctions adimensionnées sur laquelle la courbure est écrite, et  $\tilde{s} = s/L \in [0, 1]$  l'abscisse curviligne adimensionnée. Le choix de la série est *a priori* libre. Pour éviter qu'un terme ait le même effet qu'un d'autre [107], nous avons ainsi choisi des séries dont les termes sont orthogonaux

deux à deux et donc linéairement indépendants. Nous avons retenu des séries de Fourier ou de Legendre.

La série de Fourier est définie pour  $\tilde{s} \in [0, 1]$  par :

$$P_n = \begin{cases} \cos(\pi n(\tilde{s} - 1/2)) & \text{si } n \text{ pair,} \\ \sin(\pi(n+1)(\tilde{s} - 1/2)) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad (3.14)$$

La série de Legendre, est définie sur  $\tilde{s} \in [-1, 1]$  par [127] :

$$P_n(\tilde{s}) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\tilde{s}^n} (\tilde{s}^2 - 1)^n. \quad (3.15)$$

Ces polynômes sont évalués en utilisant la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} P_0(\tilde{s}) &= 1, \\ P_1(\tilde{s}) &= \tilde{s}, \\ (n+1)P_{n+1}(\tilde{s}) - (2n+1)\tilde{s}P_n(\tilde{s}) + nP_{n-1}(\tilde{s}) &= 0 \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Par homothétie, l'intervalle de définition de  $\tilde{s}$  est ramené à  $[0, 1]$ .

Par intégration de l'équation 3.13, les angles sont donnés par :

$$\theta(s) = \theta_0 + L \sum_{n=0}^N A_n Q_n(\tilde{s}), \quad (3.17)$$

dans laquelle

$$Q_n(\tilde{s}) = \int_0^{\tilde{s}} P_n(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}. \quad (3.18)$$

Les fonctions de base  $P_n$  et  $Q_n$  ne dépendent que du choix de la série. Elles sont définies de manière analytique (l'intégrale d'un polynôme de Legendre s'exprime en fonction de polynômes de Legendre), et ne calculées qu'une seule fois. La position de la ligne moyenne est obtenue par intégration numérique de l'équation (3.12).

### 3.4.1.3 Image virtuelle discrétisée $G$

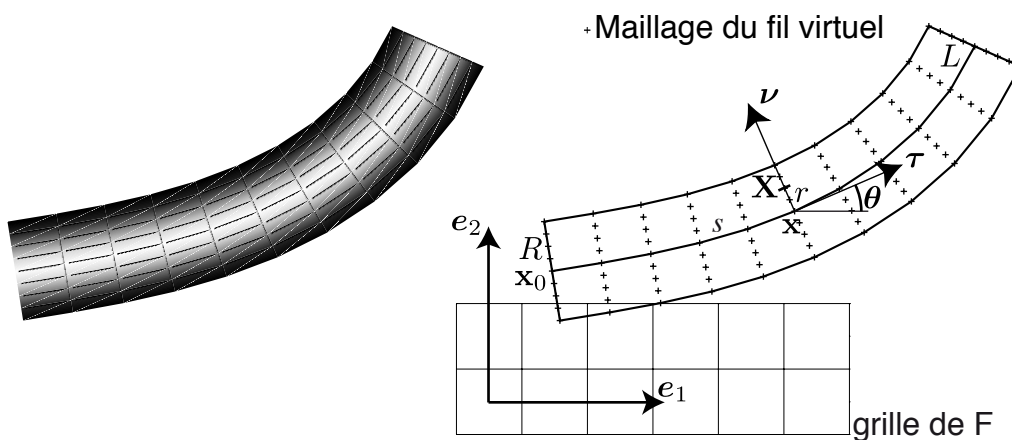


FIGURE 3.12 – Schéma de l'image virtuelle continue  $g$  (gauche) et discrétisée  $G$  (droite).

L'image  $G$  est obtenue en discrétisant l'image  $g$  de manière uniforme en  $s$ , puis de manière uniforme en  $r$  (voir Fig. 3.12). Comme dans les sections 3.2 et 3.3, le maillage associé à  $G$  est plus fin que le pixel de  $F$ .

### 3.4.1.4 Bilan

Dans cette section, nous avons présenté un jeu de paramètres  $\Lambda = \{\mathbf{x}_0, \theta_0, A_n\}$  à partir duquel nous sommes capables de construire l'image virtuelle. Nous commençons par construire la courbure de la ligne moyenne (voir Éq. (3.13)), puis l'angle (voir Éq. (3.17)) et sa position (voir Éq. (3.12)) par intégration. Ensuite, nous obtenons l'image complète en extrudant l'image virtuelle 2D le long de cette ligne moyenne (voir Éq. (3.10)).

## 3.4.2 Initialisation du fil virtuel

Nous expliquons comment le fil virtuel est initialisé, c'est-à-dire comment  $\Lambda = \{\mathbf{x}_0, \theta_0, A_n\}$  est calculé à partir des résultats donnés par la méthode d'extraction grossière (voir section 3.3).

Comme valeur initiale de  $\mathbf{x}_0$  nous choisissons l'extrémité de la poutre définie par l'utilisateur.

Le résultat de la méthode d'extraction discrète est un ensemble de segments de droite de même longueur, c'est à dire un ensemble de  $M$  angles  $\Theta_m$  (avec  $0 \leq m \leq M - 1$ ). La longueur initiale  $L_i$  est choisie comme le produit de la longueur d'un segment par le nombre de segments :  $L_i = (M)\Delta L$ . En posant  $A_{-1} = \theta_0/L$ , l'équation (3.17) peut être réécrite :

$$\frac{\theta(s)}{L} = \sum_{n=-1}^N A_n Q_n(\tilde{s}). \quad (3.19)$$

L'initialisation consiste à trouver l'ensemble des  $\{A_n\}$ . Or, en utilisant les valeurs de  $\Theta_m$ , nous disposons des  $M$  équations suivantes :

$$\frac{\Theta_m}{L_i} = \sum_{n=-1}^N A_n Q_n\left(\frac{s_m}{L_i}\right), \quad (3.20)$$

pour  $0 \leq m \leq M$ . Il est possible de résoudre l'équation (3.20) si  $N+2 \leq M$ , ce qui détermine bien des valeurs initiales pour  $A_n$ . Dans le cas général  $N+2 < M$ , le système est résolu au sens des moindres carrés.

## 3.4.3 Stratégie d'optimisation

Dans cette section, nous présentons le cœur de la méthode, qui consiste à optimiser la corrélation entre l'image physique et l'image virtuelle.

### 3.4.3.1 Corrélation

Pour trouver l'image virtuelle  $g$  qui s'approche le mieux de l'image physique  $f$  (version continue), nous minimisons la fonction  $\phi$  [121] :

$$\phi(\Lambda) = \iint_{D_g} (f - g)^2 d\Omega, \quad (3.21)$$

où  $d\Omega = (1 - \gamma r) dr ds$  est l'élément de surface. Cette équation sera discrétisée ultérieurement. L'équation 3.21 est analogue à celle utilisée dans le cas 1D (voir Éq. (3.3)) et pour l'extraction discrète (voir Éq. (3.7)).

L'algorithme `fminsearch` de Matlab est insuffisant pour minimiser une fonction (comme  $\phi$ ) qui dépend d'un grand nombre de variables : nous avons dû implanter un autre algorithme. Nous avons choisi un algorithme de type Newton-Raphson, qui nécessite le calcul des dérivées de  $\phi$ .

### 3.4.3.2 Dérivées partielles

Une condition nécessaire<sup>5</sup> pour que  $\phi$  soit minimum est l'annulation de ses dérivées partielles :  $\partial\phi/\partial\Lambda_k = 0$  ( $k$  : composante courante de  $\Lambda$ ). En utilisant l'équation (3.21), nous obtenons pour  $k$  quelconque :

$$\oint_{\partial D_g} \left( (f - g)^2 \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) d\zeta - 2 \iint_{D_g} (f - g) \left( \mathbf{grad}(g) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) d\Omega = 0, \quad (3.22)$$

où  $\partial D_g$  désigne le bord de  $D_g$ .

### 3.4.3.3 Terme de bord

Nous allons tout d'abord montrer que le terme de bord (première intégrale de Éq. (3.22)) est négligeable.

Tout d'abord, nous présentons une démonstration exacte dans l'hypothèse où  $f$  est uniforme en dehors du fil physique. Comme nous avons choisi  $R_g$  plus grand que le diamètre du fil physique, le bord  $\partial D_g$  se trouve en dehors de l'image du fil, au moins lorsque le fil virtuel est proche du fil physique. Comme  $f$  est supposée uniforme en dehors du fil physique, nous pouvons la sortir de l'intégrale. D'après l'équation (3.10),  $g$  est constant (nul) sur le bord. En utilisant la formule de Green, puis le fait que  $\text{div}(\mathbf{X}) = 2$ , nous obtenons :

$$\oint_{\partial D_g} (f - g)^2 \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} d\zeta = (f|_{\partial D_g} - g|_{\partial D_g})^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda_k} \left( \iint_{D_g} \text{div}(\mathbf{X}) d\Omega \right) = 0. \quad (3.23)$$

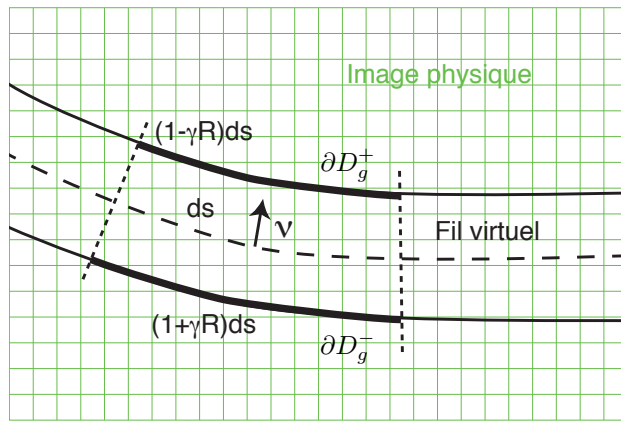


FIGURE 3.13 – Schéma illustrant la nullité du terme de bord. Le fil virtuel (délimité par les deux lignes continues noires), est superposé à l'image physique (grille verte). La portion d'intérêt (infinitésimale) du fil virtuel est délimitée par des pointillés perpendiculaire à la ligne moyenne. Le vecteur  $\boldsymbol{\nu}$  désigne la normale à la ligne moyenne,  $\partial D_g^+$  et  $\partial D_g^-$  les deux bords de la section d'intérêt.

En fait, le terme de bord reste approximativement nul sous des hypothèses plus faibles que l'uniformité de  $f$ . En négligeant l'effet des bords du fil virtuel situés en  $s = 0$  et  $s = L$

5. Nous obtenons bien le minimum voulu par cette méthode parce que nous partons de la solution issue de la méthode d'extraction discrète, qui est proche de la solution recherchée.



(dont la longueur est très faible devant la longueur du fil), et en utilisant l'équation (3.30), le terme de bord peut être réécrit :

$$\oint_{\partial D_g} (f - g)^2 \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} ds = \int_0^L \left( (1 - \gamma R)(f - g)^2(s, R) - (1 + \gamma R)(f - g)^2(s, -R) \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Lambda_k} ds, \quad (3.24)$$

(nous décomposons la frontière du fil en  $\partial D_g^+$  et  $\partial D_g^-$ , voir Fig. 3.13 ). Nous supposons que le fil est peu courbé, soit  $|\gamma R| \ll 1$ . Nous notons  $\lambda_c$  la longueur de corrélation du bruit, et  $\lambda_m$  la longueur typique de la variation de  $\partial \mathbf{x} / \partial \Lambda_k$  (dans le cas des séries choisies,  $\lambda_m \sim L/m$ ). Dans le cas d'un bruit corrélé, ou d'une inhomogénéité d'éclairage  $\lambda_c \gg R$  et  $(f - g)^2(s, R) \approx (f - g)^2(s, -R)$ . Dans le cas d'un bruit décorrélé,  $1 = \lambda_c \ll \lambda_m$ , le terme  $(f - g)^2(s, R) - (f - g)^2(s, -R)$  s'annule statistiquement sur une longueur intermédiaire  $ds$  telle que  $\lambda_c \ll ds \ll \lambda_m$ . Dans ces deux cas, le terme de bord est bien approximativement nul.

#### 3.4.3.4 Algorithme de Newton

Comme le terme de bord est négligé, l'équation (3.22) se réduit à :

$$\iint_{D_g} (f - g) \left( \mathbf{grad} (g) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) d\Omega = 0. \quad (3.25)$$

où  $g = g(\Lambda_k^{min})$  est la valeur de  $g$  au minimum de la corrélation. En écrivant le développement limité de  $g$  au voisinage du minimum  $\Lambda_k^{min}$ , nous obtenons :

$$g(\underbrace{\Lambda_k + \Delta \Lambda_k}_{\Lambda_k^{min}}) = g(\Lambda_k) + \mathbf{grad} (g) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial V_p} \Delta V_p. \quad (3.26)$$

En substituant ce résultat dans l'équation (3.25), il vient :

$$\begin{aligned} \Delta V_p \iint_{D_g} \left( \mathbf{grad} (g) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) \left( \mathbf{grad} (g) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial V_p} \right) d\Omega \\ = \iint_{D_g} \left( \mathbf{grad} (g) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) (f - g) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cette équation est discrétisée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta V_p \iint_{D_g} \left( \mathbf{grad} (g)|_G \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) \left( \mathbf{grad} (g)|_G \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial V_p} \right) d\Omega \\ = \iint_{D_g} \left( \mathbf{grad} (g)|_G \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} \right) (F_G - G) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{grad} (g)|_G$  représente la valeur analytique de  $\mathbf{grad} (g)$  aux points de la grille de  $G$ . Cette formulation élimine toute approximation liée à un éventuel calcul numérique de  $\mathbf{grad} (g)$ . Dans l'équation 3.28, le signe  $\iint$  est un abus de notation, les termes sont évalués sur le maillage fin associé à  $G$ .

L'équation 3.28 est de la forme :

$$M_{kp} \Delta V_p = L_k, \quad (3.29)$$

Il s'agit d'un système linéaire à  $N + 4$  équations et  $N + 4$  inconnues, la solution  $\Delta V_p$  est utilisée pour mettre à jour la forme du fil virtuel. Le processus itératif est répété jusqu'à ce que la valeur de  $\phi$  décroisse moins qu'une certaine valeur prescrite entre deux itérations ( $10^{-6}$  par exemple).

### 3.4.3.5 Calcul de $M_{kp}$ et $L_k$

Il est nécessaire de calculer le terme  $\mathbf{grad}(g) \cdot \partial \mathbf{X} / \partial \Lambda_k$  qui apparaît dans  $M_{kp}$  et  $L_k$ . L'équation (3.10) permet de calculer de manière analytique, et donc rapide et exacte, le gradient de l'image virtuelle  $g$  :

$$\mathbf{grad}(g) = \frac{-\pi}{2R} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \boldsymbol{\nu}. \quad (3.30)$$

Le terme  $\partial \mathbf{X} / \partial \Lambda_k$  traduit la variation du point courant de l'image virtuelle lorsque le paramètre  $\Lambda_k$  change. À partir de l'équation (B.43), nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Lambda_k} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Lambda_k} - r \frac{\partial \theta}{\partial \Lambda_k} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.31)$$

Comme cette expression n'est utilisé que dans l'équation (3.26), le second terme, colinéaire à  $\boldsymbol{\tau}$ , n'a pas besoin d'être calculé car il est orthogonal à  $\mathbf{grad}(g)$ .

Les dérivées  $\partial \mathbf{x} / \partial \Lambda_k$  sont obtenues à partir des équations (3.12) et (3.17) :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_{0,1}} = \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_{0,2}} = \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} = \int_0^s \boldsymbol{\nu} d\xi, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A_n} = L \int_0^s Q_n \boldsymbol{\nu} d\xi. \quad (3.32)$$

Les champs  $\partial \mathbf{X} / \partial \Lambda_k$  ont une signification physique forte. En effet, le déplacement du fil virtuel entre deux itérations est proche de  $(\partial \mathbf{X} / \partial \Lambda_k) \Delta \Lambda_k$ . La figure 3.14 montre des exemples de ces champs (pour plus de clarté, ils ne sont représentés que sur la ligne moyenne *i.e.*  $\partial \mathbf{x} / \partial \Lambda_k$ ). Ils jouent le même rôle que les champs de déplacements utilisés dans la méthode DIC [121, 122, 123].

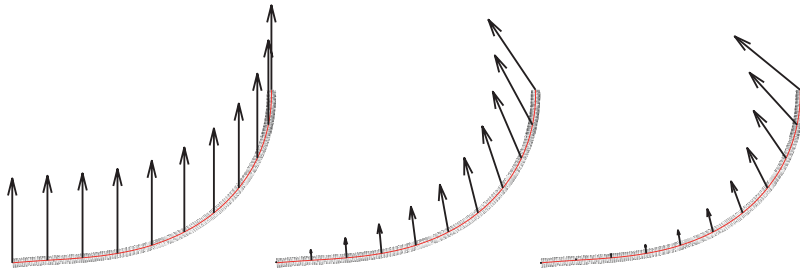


FIGURE 3.14 – Exemples de champs de déplacement cinématiques unitaires. De gauche à droite :  $\partial \mathbf{x} / \partial x_{0,2}$  (translation verticale),  $\partial \mathbf{x} / \partial \theta_0$  (rotation) et  $\partial \mathbf{x} / \partial A_0$  (augmentation uniforme de la courbure).

### 3.4.3.6 Mise à jour de la longueur du fil virtuel

La longueur totale  $L$  n'est pas modifiée directement dans l'algorithme précédent. L'extrémité libre du fil physique est détecté par une grande variation de  $\partial \phi / \partial L$ . À chaque itération, en plus de la mise à jour de  $\Lambda$ , la longueur du fil peut être ajustée (nous faisons en sorte de surestimer la longueur du fil avec la méthode d'extraction discrète, en ajoutant une poutre virtuelle par exemple).

## 3.5 Validation de la méthode pour des images synthétiques

Nous allons tout d'abord tester la précision de la méthode VIC sur des images synthétiques  $F$ , dont le niveau de gris est discrétisé sur 1, 8 ou 16 bits, et dont le niveau de bruit varie entre 0 et 100%. À la fin de cette section, nous comparons les résultats de la VIC avec ceux d'une méthode plus classique, consistant à seuiller l'image puis à ajuster les points issus du seuillage par un polynôme.

### 3.5.1 Construction de l'image synthétique de référence

Nous choisissons une image synthétique *a priori* difficile à traiter car la largeur du fil est faible et sa courbure varie beaucoup. Nous utilisons comme image synthétique une image de fil dont la ligne moyenne est une spirale logarithmique, d'équation polaire  $\rho_f = ab^\psi$ , avec  $a = 8$  et  $0 \leq \psi \leq 7\pi$  et où  $(\rho_f, \psi)$  désignent les coordonnées polaires. Cette spirale a été choisie car sa position  $\rho_f$ , l'angle  $\theta_f$  et la courbure  $\gamma_f$  sont connus analytiquement. De plus, la courbure varie notablement ( $1/146 \leq \gamma_f \leq 1/8 \text{ pixel}^{-1}$ ). L'expression analytique de  $\gamma_f$ , ainsi que l'orthogonalité des termes des séries de Fourier et de Legendre, permettent également de calculer la valeur exacte des coefficients  $A_{f,n}$  :

$$A_{f,n} = \frac{\int_0^1 \gamma_f(\tilde{s}) P_n(\tilde{s}) d\tilde{s}}{\int_0^1 (P_n(\tilde{s}))^2 d\tilde{s}}. \quad (3.33)$$

La largeur du fil synthétique vaut seulement 2 pixels ( $2R_f = 2$ ), ce qui est peu. Le profil de luminance  $l$  du fil synthétique vaut  $l = \cos(\pi r / (2R_f))$ , pour  $r \in [-R_f, R_f]$ .

La discrétisation spatiale de l'image  $f$  est une image de taille  $401 \times 401$  pixel. Comme dans le cas 1D, la valeur de l'image discrétisée est obtenue en moyennant le profil de luminance sur chaque pixel (pour calculer cette moyenne, le fil synthétique est discrétisé sur un maillage bien plus fin  $40 \times 10^4$ ). Après discrétisation du niveau de bruit sur 8 bit, nous obtenons l'image  $F$  à traiter, représentée en figure 3.15.

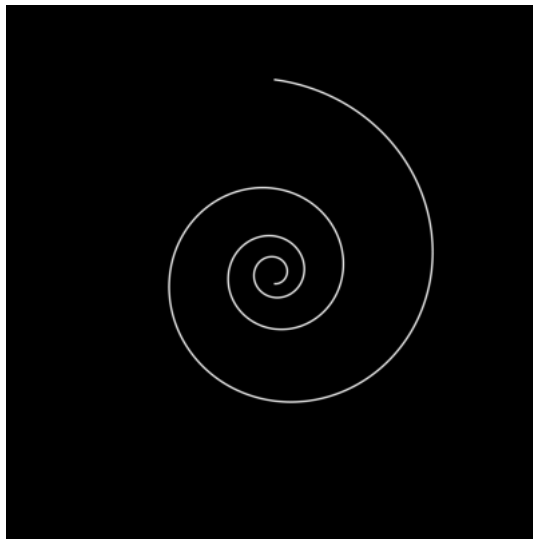


FIGURE 3.15 – Image de référence  $F$  ( $401 \times 401$  pixel, 8 bit, non bruitée).

### 3.5.2 Analyse de l'image synthétique

#### 3.5.2.1 Extractions discrète et analytique

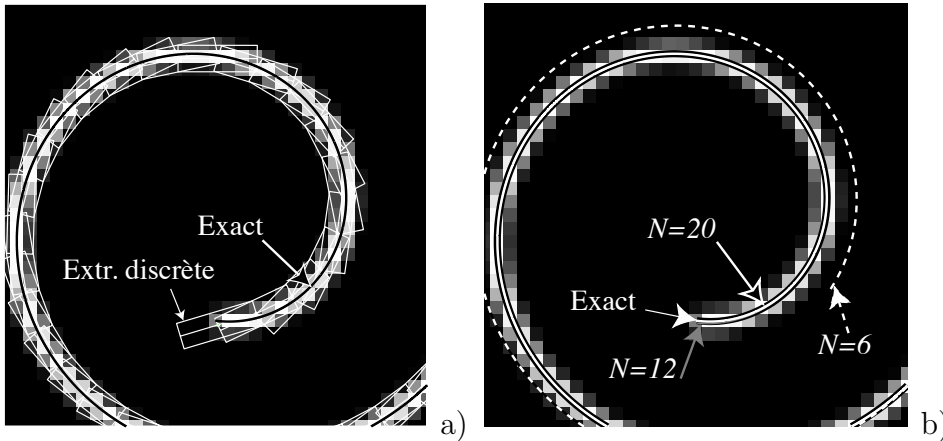


FIGURE 3.16 – Détail de la spirale : a) extraction discrète, b) extraction analytique.

L'extraction discrète est effectuée avec une poutre virtuelle de rayon  $R_g = 1$  et de longueur  $\Delta L = 6$  (en pixel de  $F$ ), et dont le maillage est 3 fois plus fin que celui de  $F$ . La spirale est identifiée en partant du point le plus extérieur ( $\psi = 7\pi$ ) pour aller vers le centre ( $\psi = 0$ ) où la courbure est plus grande et donc là où la spirale est la plus difficile à identifier. La figure 3.16a montre le résultat de cette identification, près de l'extrémité intérieure de la spirale. Comme le montre cette figure, les centres des poutres virtuelles sont proches de la spirale analytique (étiquetée «exact» sur la figure).

L'extraction analytique est effectuée avec des séries de Legendre d'ordre  $N = [6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20]$  (successivement).

#### 3.5.2.2 Résultats

La figure 3.16b montre que pour  $N \geq 12$ , l'extraction analytique suit la forme exacte jusqu'à l'extrémité de la spirale. Pour  $N = 6$ , un écart est observé dans la zone de forte courbure de la spirale : le nombre de paramètres utilisés pour décrire le fil virtuel est trop faible pour décrire les courbures importantes. La figure 3.17a donne l'écart  $\Delta\rho$  entre la position (rayon mesuré à partir du centre de la spirale) exacte  $\rho_f$  et le rayon mesuré  $\rho_s$ . Dans le cas de l'extraction discrète, l'écart  $\Delta\rho$  est déjà inférieur à  $1/2$  pixel. Cette précision est courante, mais pas générale (voir Fig. 3.10), et dépend notamment du rayon  $R_g$  choisi. Le résultat de l'extraction analytique dépend fortement de l'ordre de la série de Legendre. Pour les ordres trop faibles, l'écart est plus important que pour l'extraction discrète, parce que le nombre de paramètres n'est pas suffisant. L'écart diminue avec l'ordre, et devient nettement plus faible que celui obtenu lors de l'extraction discrète : pour  $N = 20$ , l'écart est inférieur en tout point à  $0,1$  pixel. L'angle  $\theta$  est défini comme l'angle entre le vecteur  $\mathbf{e}_1$  et le vecteur  $\boldsymbol{\tau}$ . La figure 3.17b donne l'écart  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_s$  entre l'angle exact  $\theta_f$  et l'angle mesuré  $\theta_s$ . L'extraction discrète donne un résultat relativement correct (ici de l'ordre de  $\pi/100$ ) mais très bruité. Comme pour la position, la précision de l'extraction analytique augmente avec l'ordre. L'écart pour  $N = 20$  est proche de  $\pi/200$  ( $< 1^\circ$ ), ce qui est plus précis que la méthode d'extraction discrète et aussi beaucoup plus lisse.

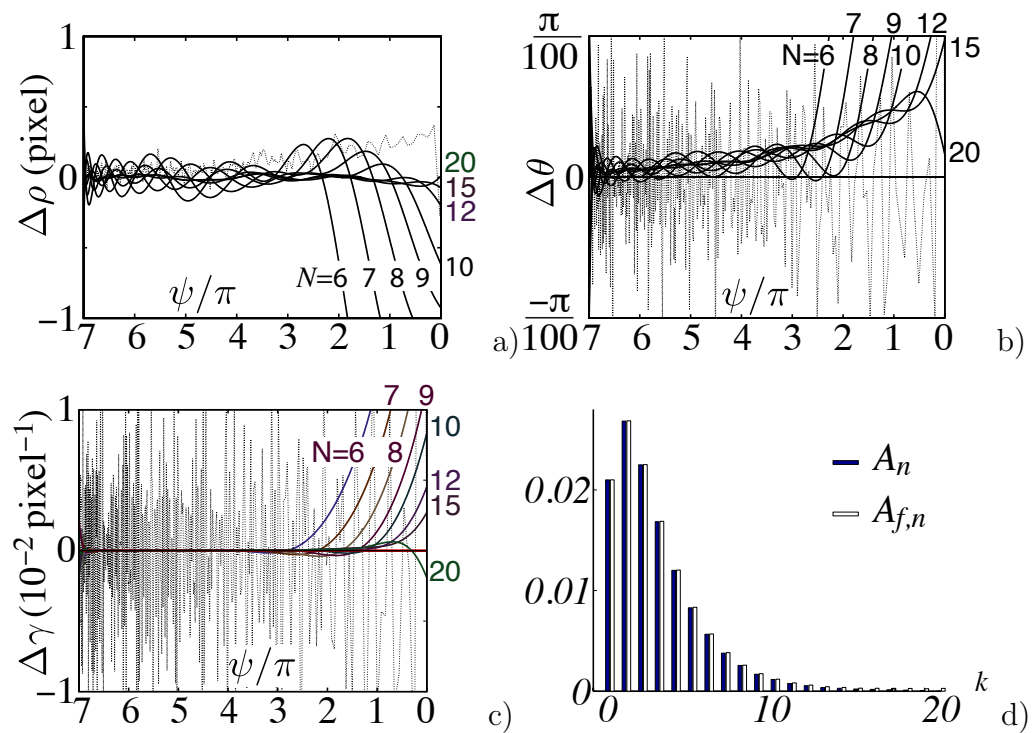


FIGURE 3.17 – Comparaison des valeurs exactes et mesurées (a) : écart entre le rayon mesuré et le rayon exact. Ligne fine pointillée : extraction discrète, lignes épaisses : extraction analytique. (b) : même chose pour l'angle (c) : même chose pour la courbure. (d) : coefficients de la série de Legendre, exacts  $A_{f,n}$  et mesurés  $A_n$ .

L'écart sur la courbure  $\Delta\gamma = \gamma_f - \gamma_s$  est montré dans la figure 3.17c. Le résultat issu de la méthode d'extraction grossière est très bruité, au contraire de ceux obtenus par la méthode analytique. À l'ordre  $N = 20$ , l'écart sur la courbure n'excède pas 2% ( $\gamma_f \simeq 0.12 \text{ pixel}^{-1}$  à l'extrémité intérieure de la spirale).

Ces résultats valident la précision de la méthode VIC, pour la position, l'angle et la courbure.

De plus, les coefficients de la série de Legendre  $A_n$ , obtenus pour  $N = 20$ , sont proches des coefficients exacts  $A_{f,n}$  (voir Fig. 3.17 d). D'autre part, ces coefficients varient de manière continue et réversible lorsque l'ordre de la série  $N$  change (tests non présentés).

### 3.5.3 Influence du bruit et de la discrétisation du niveau de gris

À l'image  $F$ , avant discrétisation du niveau de gris, est ajouté un bruit gaussien, dont la valeur en chaque pixel est décorrélée et d'écart-type  $\sigma_N$  compris entre 0 et 100% (de la valeur du contraste du fil synthétique). Ces images sont ensuite discrétisées en niveaux de gris codés sur 1 bit (noir et blanc), 8 bit et 16 bit. Les valeurs de niveau de gris non-incluses dans  $[0, 1]$  sont tronquées.

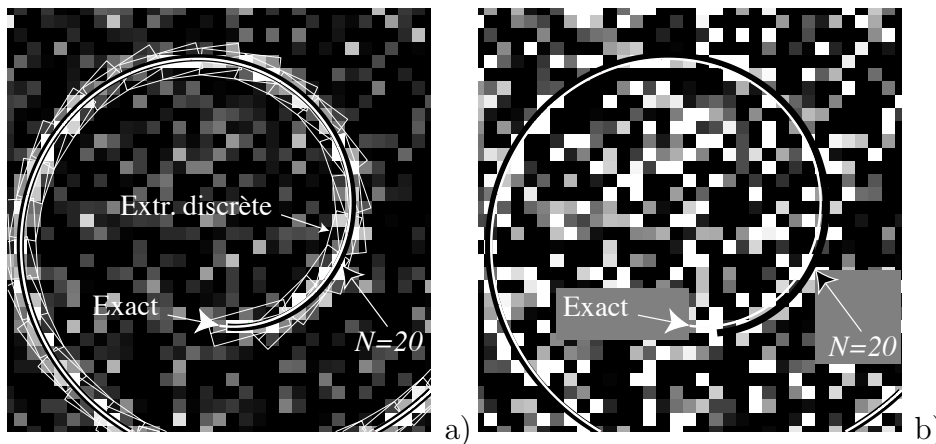


FIGURE 3.18 – Détail de la spirale pour deux niveaux de bruit. a) 8-bit et bruit  $\sigma_N = 30\%$ , b) 8-bit et bruit  $\sigma_N = 100\%$ .

L'extraction discrète, ainsi que l'extraction analytique (réalisée ici avec  $N = 20$ ), parvient à suivre la spirale jusqu'à un niveau de bruit  $\sigma_N = 20\%$  pour les image 1 bit et  $\sigma_N = 30\%$  pour les images 8 et 16 bits (voir Fig. 3.18 a). Pour les images très bruitées, nous avons utilisé l'extraction analytique en l'initialisant avec le résultat de l'extraction discrète pour une image peu bruitée<sup>6</sup> Dans ce cas, l'extraction analytique continue de donner un résultat plus précis que le pixel, sauf pour  $\sigma_N = 100\%$ . La robustesse de la méthode VIC est donc limitée par l'extraction discrète.

La statistique de  $\rho_f(\psi) - \rho_s(\psi)$  le long du fil est donnée en figure 3.19, où le milieu du rectangle donne la moyenne et sa longueur vaut deux fois l'écart-type. L'extraction discrète, lorsqu'elle parvient à suivre la spirale, dépend peu du niveau de bruit, et reste sub-pixel. La précision de l'extraction analytique est supérieure à celle de l'extraction discrète ; elle dépend

6. Ceci pourrait être utile pour l'analyse d'un film, où le fil est immobile au début, ce qui permet de moyennner le bruit et d'utiliser la méthode d'extraction discrète, puis l'extraction analytique. L'extraction analytique serait ensuite utilisée, initialisée par la solution correspondant à l'image précédente.

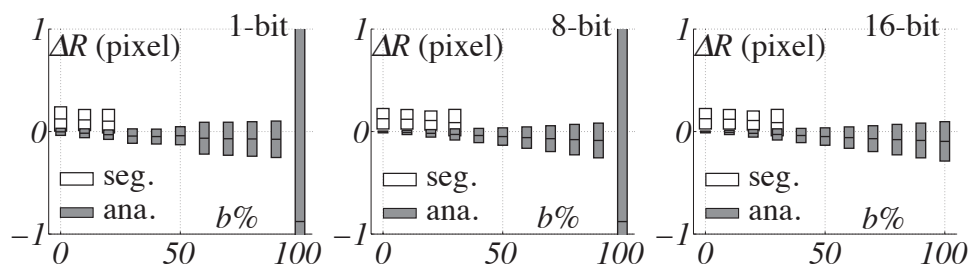


FIGURE 3.19 – Influence du niveau de bruit et de la discrétisation du niveau de gris sur la précision.

peu du niveau de discrétisation, et varie approximativement linéairement avec le niveau de bruit. Cette dernière propriété est similaire au cas 1D (voir Fig. 3.6a) ; par contre, à 2D, le bruit dégrade nettement moins la précision de la VIC : le bruit, présent de chaque côté du fil, se «compense».

### 3.5.4 Comparaison avec la méthode de seuillage

Dans cette section, nous allons comparer la méthode VIC à la première méthode que nous avons utilisée, que nous appelons méthode de base dans cette section. Cette méthode consiste à seuiller l'image, puis à ajuster une partie des points blancs (qui correspondent au fil) par un polynôme  $p$  et à déduire la courbure grâce à la formule  $p''/(1+(p')^2)^{3/2}$ . Nous comparons cette méthode de seuillage avec la méthode VIC dans le cas le plus favorable pour la méthode de base, qui est le cas d'une image sans bruit (avec du bruit, le seuillage est difficile).

Nous choisissons pour cette illustration l'image synthétique 3.20a, qui est une spirale logarithmique. Cette image est utilisée directement par la méthode VIC. L'image après seuillage est présentée en figure 3.20b. Le cercle vert montre le point d'intérêt, où la courbure est mesurée. La figure 3.21 donne un exemple d'ajustement par un polynôme des points issus du seuillage (avec des poids égaux à 1).

Les deux méthodes sont comparées dans la figure 3.22. La méthode de base possède deux paramètres ajustables : le degré du polynôme et le nombre de points utilisés pour l'ajustement. Il est aussi possible de tourner le repère de l'image, ce qui change l'axe des abscisses utilisés pour l'ajustement. Nous observons que cette méthode donne un ordre de grandeur correct mais pas une mesure de la courbure. De plus, il n'existe pas de plage de valeurs des paramètres pour laquelle la valeur obtenue est constante et fiable. La méthode VIC ne dépend que d'un paramètre, l'ordre de la série. Au contraire de la méthode de base, la valeur trouvée est toujours fiable, et sur une plage de 10 valeur de l'ordre  $N$ , la valeur obtenue diffère de la valeur théorique de moins de 3%.

## 3.6 Validation de la méthode pour des images expérimentales

Dans la section précédente, nous avons validé la VIC sur des images synthétiques. Dans cette section, nous allons l'appliquer à des images expérimentales. La précision de la VIC est ainsi validée dans le cas d'un exemple mécanique, à savoir une barre d'aluminium fléchissant

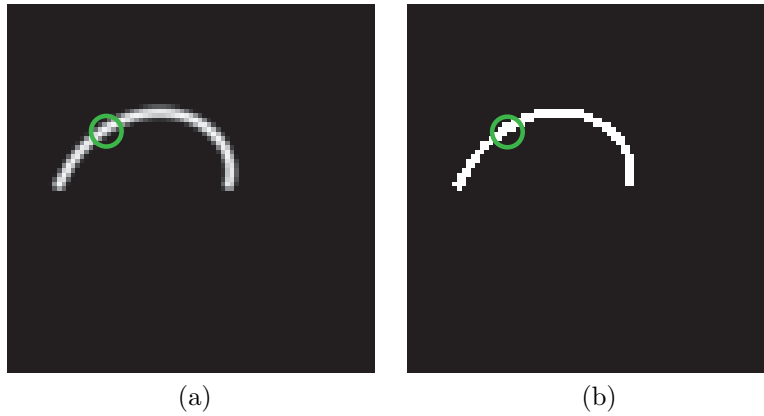


FIGURE 3.20 – Image utilisées pour la comparaison entre la méthode VIC et la méthode basique. Le profil de  $f$  est un cosinus décalé de largeur 1,5 pixel. (a) : image en niveaux de gris utilisée par la méthode VIC ; (b) : image seuillée utilisée pour la méthode basique. Le cercle vert indique le point où nous mesurons la courbure.

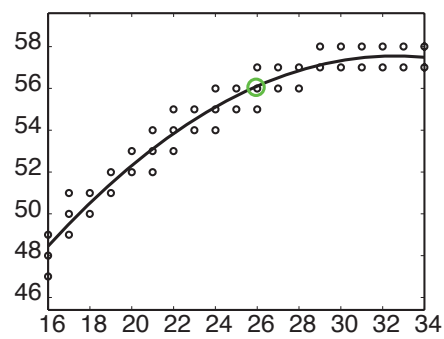


FIGURE 3.21 – Ajustement par un polynôme de degré 2 (ligne continue) d'un ensemble de points (44) issus de l'image seuillée. Cette figure correspond à un détail de l'image 3.20b. Le cercle vert indique le point où nous mesurons la courbure.



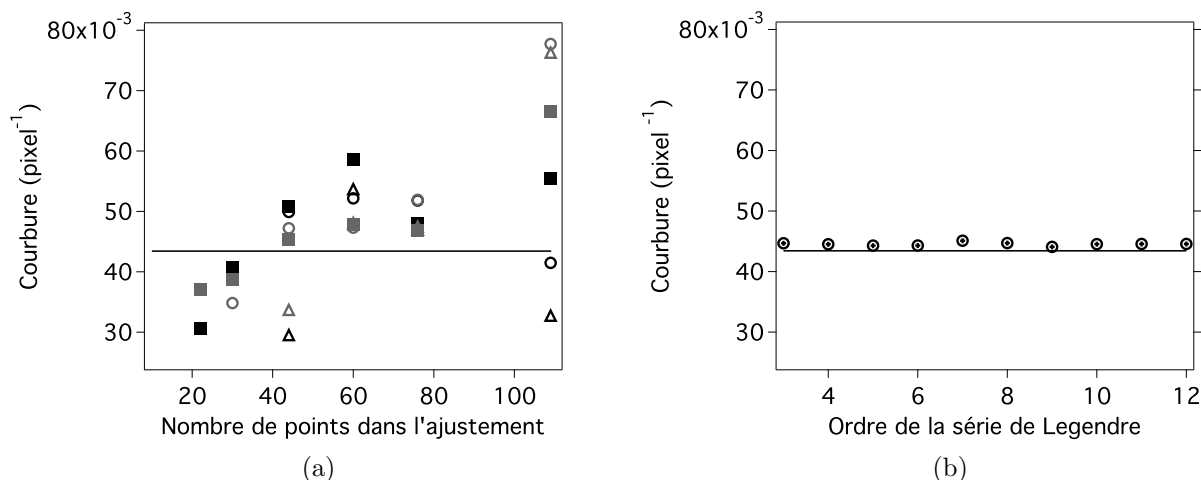


FIGURE 3.22 – Courbures obtenues par les deux méthodes. La ligne continue correspond à la valeur théorique. (a) : résultats de la méthode basique. (■) : ordre 2, (○) : ordre 3, (△) : ordre 4, les symboles noirs correspondent à un ajustement dans le repère de base (voir Fig. 3.21), les symboles gris à l'ajustement des points après rotation de  $-1,08$  du repère (pour que le point d'intérêt corresponde à un minimum local). (b) : résultat de la méthode VIC.

sous son propre poids. Nous vérifions également la robustesse de la méthode sur des exemples d'intérêt physique, à savoir un fil transporté par un fluide dans une fracture et une image de panache thermique.

### 3.6.1 Barre fléchissant sous son propre poids

#### 3.6.1.1 Dispositif expérimental

Dans cette section, nous validons la VIC à un problème mécanique pour lequel la solution est connue. Nous avons choisi le cas, simple mais non trivial, d'une barre initialement droite fléchissant sous son propre poids. Nous avons choisi une barre cylindrique en aluminium (de type 2017-T4), parce que le module d'Young  $E$  de l'aluminium est connu (72 GPa, voir [128]) et dépend peu de l'échantillon. De plus, cet aluminium est un matériau dont la limite d'élasticité est bien nette, éliminant tout problème de plasticité ou de viscosité. Le module d'Young a été vérifié par un test de flexion 3 points en utilisant une machine d'essai Instron, qui donne  $E = 72,6$  GPa. La longueur de la poutre choisie vaut 2459 mm et son diamètre  $4,95 \pm 0,02$  mm. Une extrémité de la barre est tenue dans le mandrin d'une fraiseuse qui assure une condition d'encastrement. L'autre extrémité est libre. La résolution numérique des équations de la statique d'une poutre (voir annexe A) donne, sans paramètre ajustable, la position, la longueur et la courbure de la poutre.

La figure 3.23(a) montre l'image de la barre, prise avec un appareil photo Nikon D300, lorsque la barre est au repos (ce qui peut prendre plusieurs minutes). Un rideau noir a été placé derrière la barre, afin d'avoir un fond uniforme noir. La partie de l'image qui est présentée est constituée de  $4288 \times 2848$  pixels.

Cette image a été traitée en imposant l'abscisse  $x_{0,1}$ , afin la corrélation ne prenne pas en compte le mandrin (voir Fig. 3.23 (b)). Le diamètre du fil virtuel vaut  $2R_g = 20$  pixels (celui de la barre environ  $W_F \sim 10$  pixels). L'extraction discrète nécessite  $M = 274$  poutres virtuelles. La grille associée au fil virtuel est trois fois plus fine que le pixel de l'image

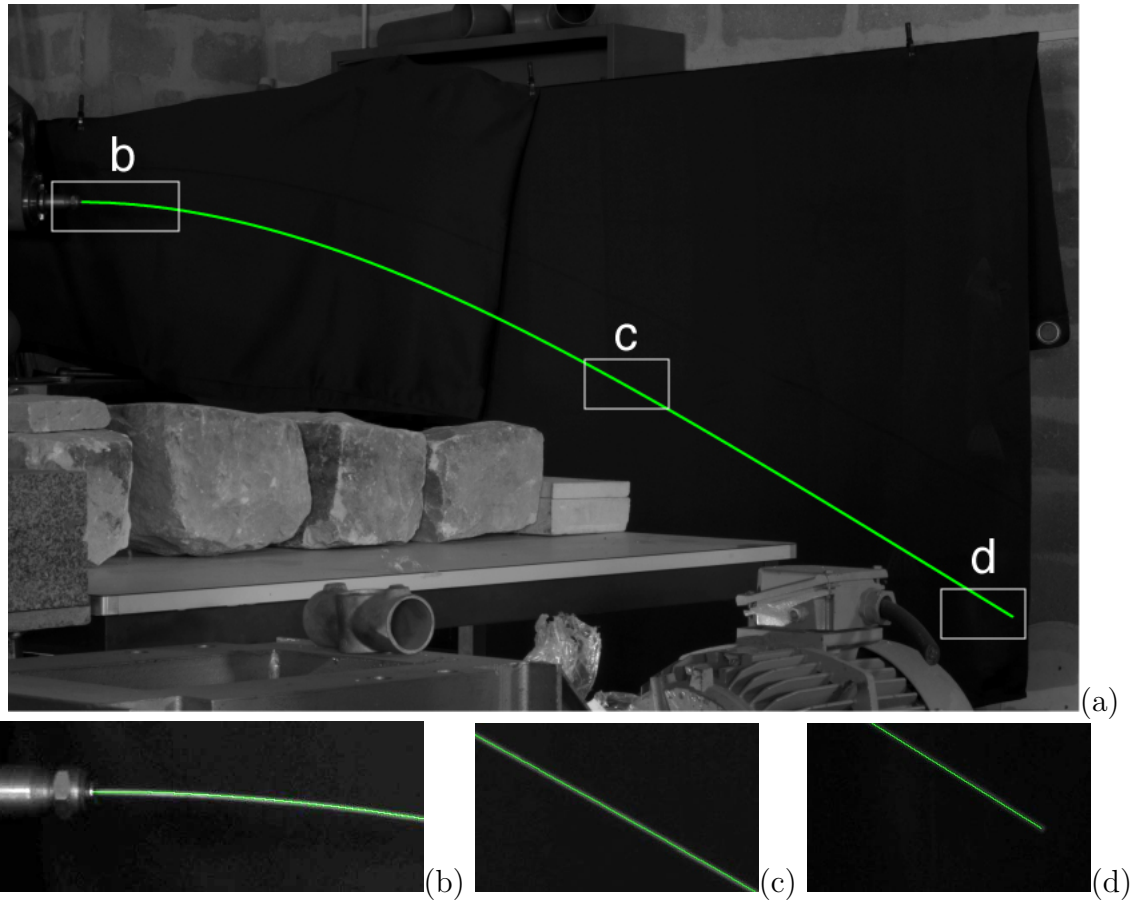


FIGURE 3.23 – (a) Barre d'aluminium fléchissant sous son propre poids. Zooms : (b) près du mandrin, (c) au milieu de la barre et (d) à l'extrémité libre. Ligne continue verte : ligne moyenne obtenue par la méthodeVIC.

physique. Le temps de calcul est inférieur à la minute en utilisant un ordinateur MacBook Pro (deux processeurs de 2,8 GHz).

### 3.6.1.2 Comparaison du résultat la VIC et de l'image physique

Nous vérifions tout d'abord que la forme de la barre issue de la VIC coïncide avec celle de l'image physique. Les zooms (Fig. 3.23 (b),(c) et (d)) montrent que la ligne moyenne issue de la VIC (en vert) coïncide effectivement avec l'axe de la barre, et ceci sur toute sa longueur. Comme la corrélation ne se fait que sur le domaine de définition de l'image virtuelle, le traitement d'image n'est pas sensible aux objets situés loin de la barre, comme par exemple les pierres visibles dans la figure 3.23a.

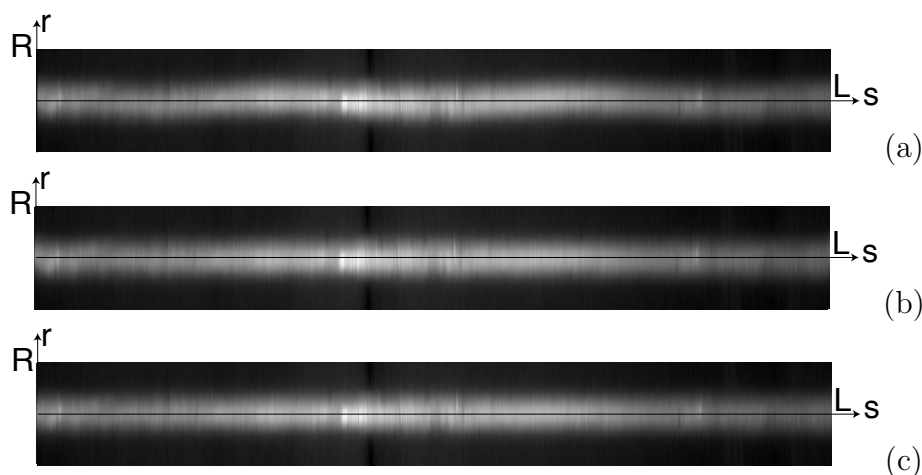


FIGURE 3.24 – Image physique dans le repère déplié  $[-R, R] \times [0, L]$  de l'image virtuelle pour (a) :  $N = 3$ , (b) :  $N = 7$  et (c) :  $N = 11$ .

Les résidus peuvent être tracés dans le repère (déplié) de l'image virtuelle (voir Fig. 3.24). Dans le cas d'une corrélation parfaite, quelle que soit la tortuosité de la poutre, la figure est symétrique par rapport à la droite  $r = 0$ . À cause du zoom important selon  $r$ , nous voyons dans la figure 3.24 pour un ordre  $N = 3$  une ondulation selon  $s$ , qui devient plus faible pour  $N = 7$ , et presque invisible pour  $N = 11$ . Les inhomogénéités d'éclairage sont visibles (la barre est plus éclairée en  $s \approx L/2$  que sur les bords) mais n'influencent pas le résultat final.

### 3.6.1.3 Comparaison des résultats de la VIC et de la théorie des poutres

Pour valider la mesure de l'angle et de la courbure issus de la VIC, nous comparons ces grandeurs à celles calculées à partir de la théorie des poutres et des caractéristiques géométriques et élastiques de la barre. Ces caractéristiques de la barre ne sont pas connues exactement, notamment la rigidité en flexion. De plus, la forme à vide n'est pas exactement droite : les images de la barre avant et après rotation de  $180^\circ$  ne coïncident qu'à 10 mm près (pour une longueur de la barre de 2459 mm). La solution issue de la théorie des poutres est donc affectée d'une incertitude.

Une vérification préliminaire consiste à comparer les résultats de la VIC et de la théorie des poutres pour la position du fil. La figure 3.25 montre que la position obtenue par la VIC coïncide, pour les différents ordres testés, avec le résultat issu de la théorie des poutres,

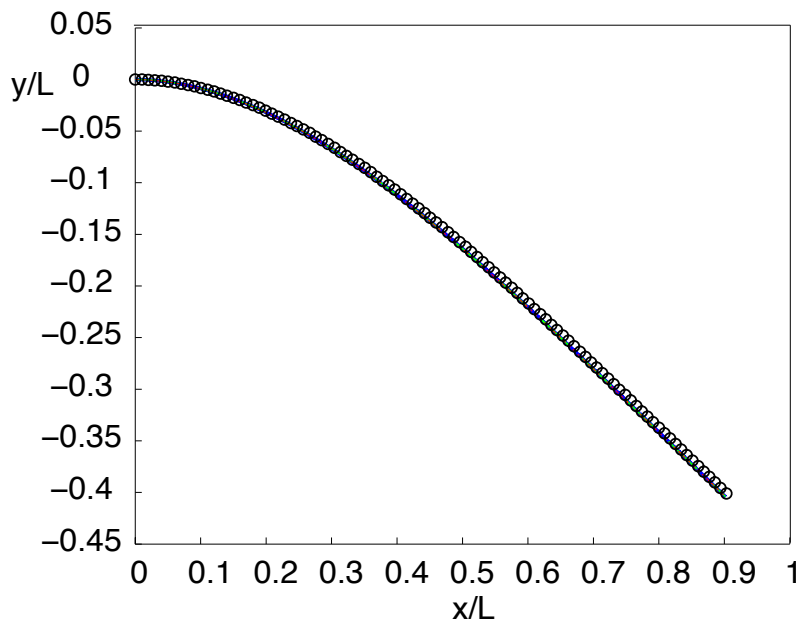


FIGURE 3.25 – Position de la barre en aluminium en coordonnées adimensionnées. Ligne continue bleue :  $N = 3$ , tirets verts :  $N = 7$ , pointillés rouges :  $N = 11$ . Cercles noirs : solutions théorique.

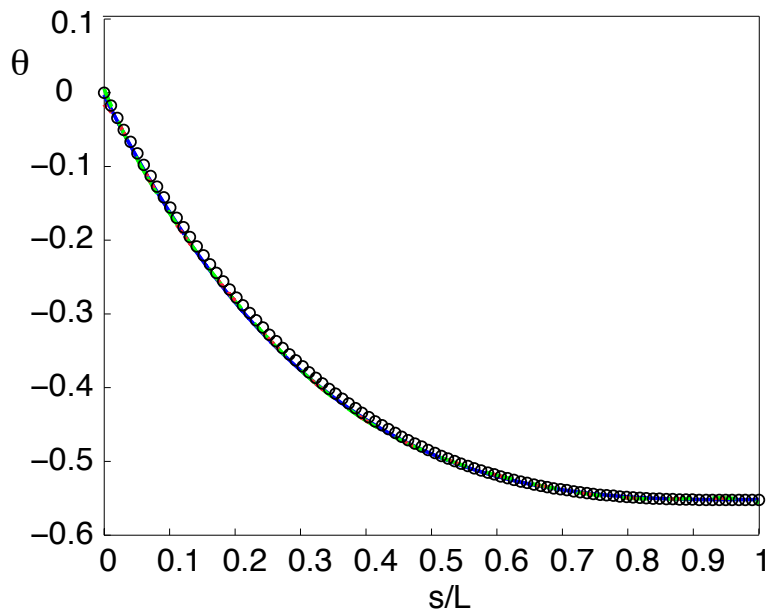


FIGURE 3.26 – Angle par rapport à l'horizontale. Mêmes symboles que Fig. 3.25 .

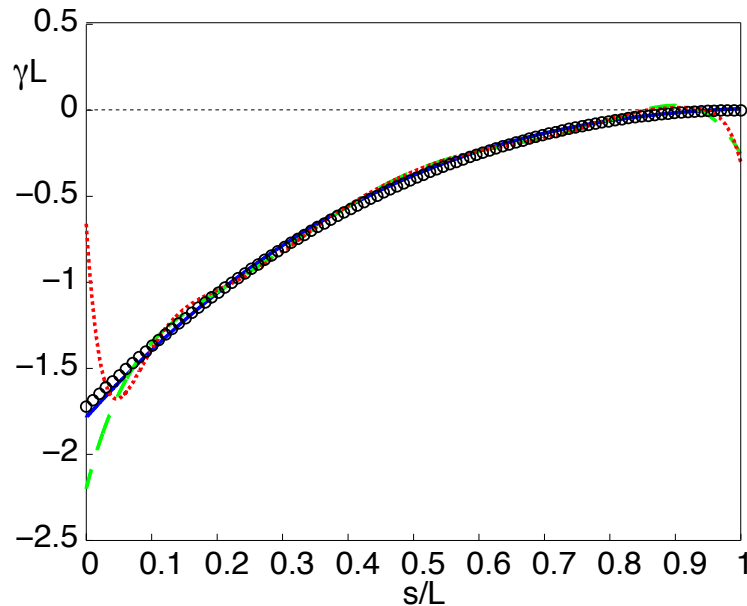


FIGURE 3.27 – Courbure de la barre en aluminium. Mêmes symboles que Fig. 3.25 .

et ceci sans paramètre ajustable. L'écart est de l'ordre de 10 mm. Cet écart est similaire à l'écart entre l'image présentée et l'image la barre après rotation de  $180^\circ$  : ceci montre qu'il est essentiellement dû au fait que la forme naturelle de la barre n'est pas exactement une droite.

Les figures 3.26 montre que l'angle mesuré est en accord avec le résultat de la théorie des poutres (à  $0,01 \text{ rad} = 0,6^\circ$  près), pour les différents ordres utilisés. En particulier, l'angle initial  $\theta(s=0) = 0$  est correctement mesuré (cette valeur n'est pas imposées par la suite de polynômes de Legendre).

La courbure mesurée pour  $N = 3$  est en accord avec le résultat de la théorie des poutres (voir Fig. 3.27 , à une précision de l'ordre de 3% (de la valeur maximale de  $\gamma$ ). La valeur finale  $\gamma(s=L) = 0$  est effectivement retrouvée.

*Ces résultats valident la précision de la méthode VIC, sur une image expérimentale.*

#### 3.6.1.4 Choix de l'ordre $N$

La position et l'angle dépendent peu de l'ordre  $N$  choisi, pourvu qu'il soit suffisant pour que le fil virtuel coïncide avec le fil physique (voir Fig. 3.25 et Fig. 3.26 ). Par contre, la courbure mesurée dépend de l'ordre  $N$  au voisinage des extrémités (voir Fig. 3.27 ). Ce phénomène n'est pas observé lors de la mesure de la courbure d'une image synthétique (voir section 3.5.2). Étant donné que l'écart à la solution théorique n'est pas dans le même sens au début de la poutre ( $s=0$ ), cet écart ne peut pas être dû à une variation «physique» de la courbure à cet endroit. Il s'agit d'un artefact, peut-être lié au fait que l'algorithme cherche à décrire de possibles ondulations à haute fréquence de la forme à vide.

En pratique, le meilleur choix est souvent la plus petite valeur de  $N$  pour lequel le fil virtuel se superpose au fil physique.

### 3.6.2 Robustesse de la méthode

Dans cette section, nous vérifions la robustesse de la méthode sur des exemples d'images expérimentales.

#### 3.6.2.1 Fil dans une fracture

L'exemple présenté ici est un des exemples qui a motivé le développement de la méthode de traitement d'image. Il s'agit d'un résultat expérimental obtenu par M. V. d'Angelo [32] lors de son étude sur le transport de fils dans une fracture modèle rugueuse (voir introduction). L'image représente un fil de polyester (diamètre  $280 \mu\text{m}$ ) entraîné dans une fracture rugueuse d'ouverture moyenne  $0,65 \text{ mm}$ .

Le traitement de cette image présente plusieurs difficultés. Tout d'abord, le diamètre du fil vaut au plus 2 pixels. De plus, l'image présente un gradient d'éclairage. D'autre part, à cause du caractère rugueux de la fracture modèle, l'image est fortement bruitée. Enfin, le fil présente des boucles.

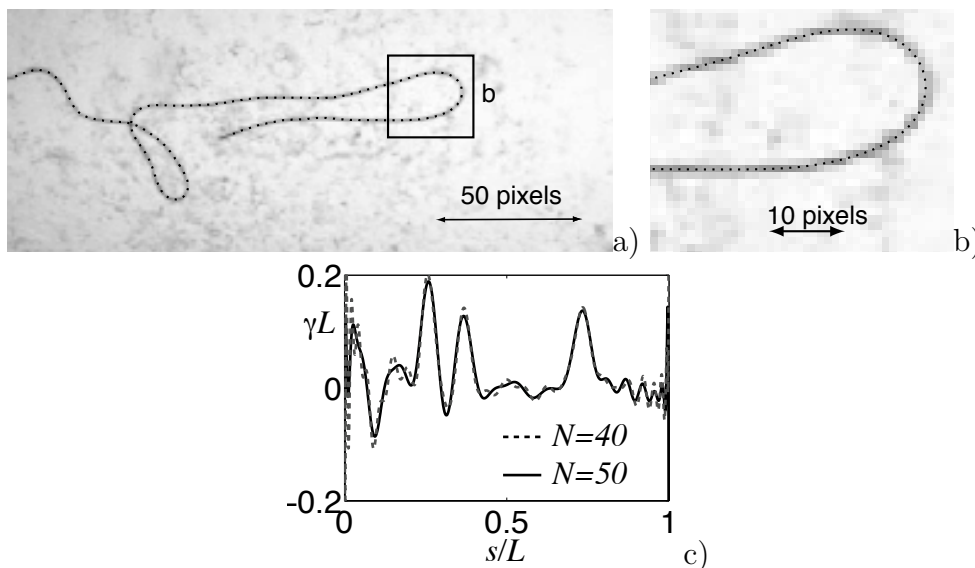


FIGURE 3.28 – Fil transporté par un écoulement dans une fracture (unité : 1 pixel). (a) Image physique et ligne moyenne issue de la VIC (pointillés), pour  $N = 50$ . (b) Zoom. (c) Courbure le long du fil, pour deux valeurs  $N$  de l'ordre de la série de Legendre.

La méthode VIC a été appliquée avec un rayon  $R_g = 1$  et une série de Legendre  $N = 50$  (voir Fig. 3.28). La valeur de  $x_{0,1}$  a été fixée pour éviter les problèmes liés à la longueur du fil. Cet exemple montre que la méthode de corrélation d'image est robuste au bruit, à l'inhomogénéité de l'éclairage et au passage des boucles. De plus, la courbure dépend peu de l'ordre choisi, au moins loin des extrémités, ce qui renforce la confiance dans la méthode VIC, et montre que cette méthode mesure effectivement la courbure *locale*.

#### 3.6.2.2 Panache thermique

La figure 3.29 représente une image de panache thermique dont le contraste a été augmenté. Cette image a été obtenue par Anne Davaille et Judith Vatteville lors d'une expérience modèle de convection thermique, qui vise à mieux comprendre la convection dans

le manteau terrestre [129, 130]. Un cylindre, chauffé à température constante, est placé au fond d'un réservoir, contenant un fluide dont la viscosité dépend de la température (sirop de sucre). Un panache thermique se développe à partir de ce cylindre.

Le liquide contient en suspension des cristaux liquides thermochromiques, c'est-à-dire des cristaux liquides qui apparaissent brillants à une température donnée lorsqu'ils sont éclairés par une nappe laser. Une ligne brillante correspond donc à une isotherme qu'il est utile d'extraire, par exemple pour calculer les flux thermiques.

Cette image est particulièrement difficile à traiter. En effet, les isothermes sont constituées d'amas *discontinus*, qui correspondent à des grains contenant le cristal liquide. La luminosité et la taille de ces amas varient beaucoup selon la position considérée. Comme plusieurs cristaux liquides différents sont utilisés simultanément, il y a plusieurs isothermes qui doivent être extraits séparément. Enfin, l'image est bruitée.

L'identification a été faite avec une poutre virtuelle de rayon  $R = 4$ . Nous avons choisi une série de Fourier (d'ordre  $N = 40$ ), qui donne des résultats moins précis que la série de Legendre, mais qui est beaucoup plus robuste. Comme le montre l'image 3.29, la méthode de traitement d'image parvient à mesurer la forme du panache. De plus, comme le montre la figure 3.29b, le résultat pour l'angle du vecteur tangent est lisse, et donc utilisable pour des calculs futurs.

## 3.7 Conclusion

Nous avons développé une nouvelle méthode de traitement d'images, que nous avons nommée VIC, particulièrement bien adaptée à notre problème de détermination précise des formes de fils. La VIC permet de déterminer analytiquement la position, l'angle et la courbure de la ligne moyenne d'un fil à partir d'une image. Cette méthode est basée sur la corrélation de l'image physique et une image virtuelle de fil. Le choix des paramètres de cette image virtuelle (largeur du fil, ordre de la série) n'est pas critique, il existe de larges plages où le résultat est indépendant des choix effectués. De plus, le profil de niveaux de gris des images physique et virtuelle n'ont pas besoin d'être identiques. En particulier, cette méthode reste précise même si la largeur ou le contraste du fil de l'image physique n'est pas constante.

La précision des résultats obtenus a été vérifiée pour des fils longs sur des images synthétiques et sur l'image d'une barre d'aluminium fléchissant sous son propre poids. La ligne moyenne du fil est localisée avec une précision sub-pixel, et l'angle local et la courbure locale, dérivées première et seconde de la position, sont mesurés avec une précision de quelques pourcents. Néanmoins, en ce qui concerne la courbure, la méthode VIC reste à améliorer, notamment pour éliminer les oscillations parasites observées pour les ordres élevés près des extrémités du fil. Nous envisageons d'utiliser d'autres types de représentation de la ligne moyenne (splines par exemple) pour régler ce problème. D'autre part, nous avons validé la robustesse de la méthode par rapport au bruit et aux inhomogénéités d'éclairage. La méthode fonctionne même pour les fils dont le diamètre ne fait que quelques pixels, et qui présentent des boucles.

La précision, la robustesse et la régularité ( $C^\infty$ ) des résultats obtenus sont des conséquences de l'hypothèse implicite que nous cherchons *a priori* à identifier un objet allongé lisse. Cette hypothèse est utilisée lors de la construction du fil virtuel : celui-ci est contraint d'être lisse. Plus généralement, si nous utilisons la VIC dans une situation où nous disposons d'encore plus d'information *a priori*, par exemple si nous connaissons la forme de l'équation

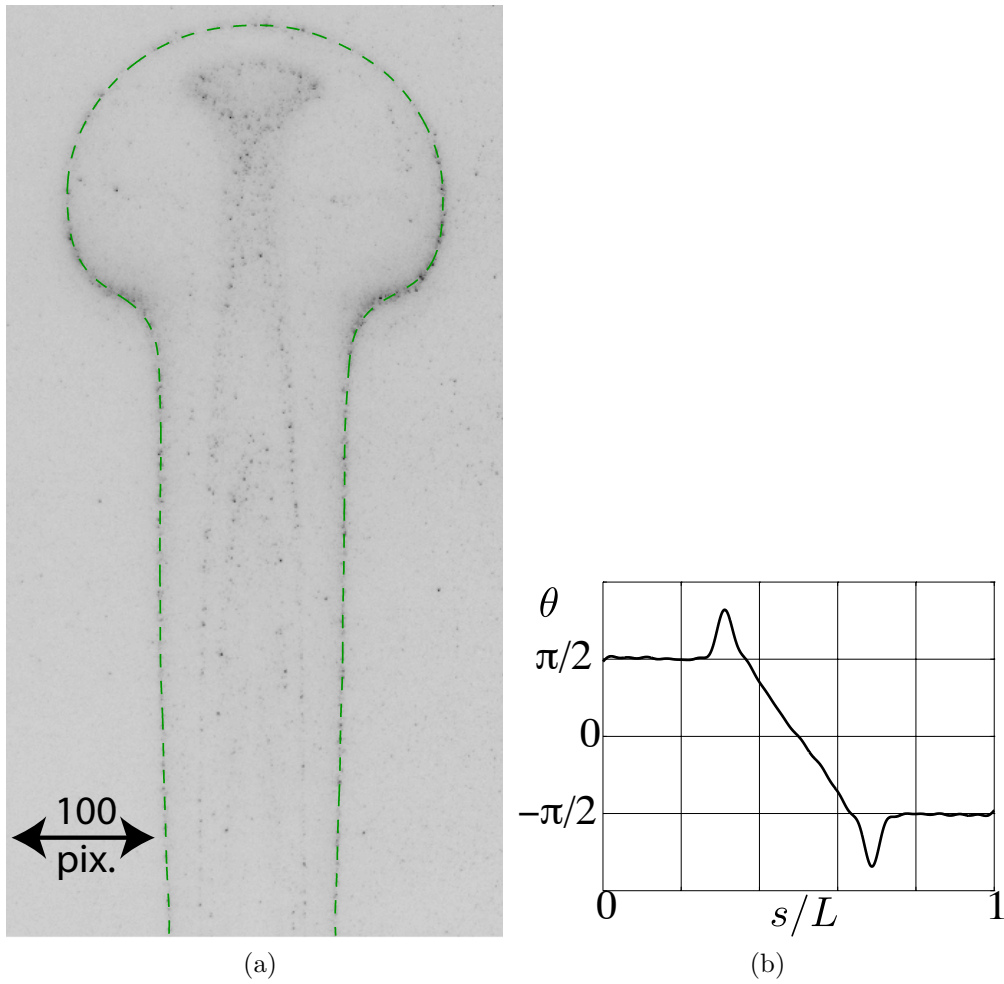


FIGURE 3.29 – Image de panache thermique (avec l'aimable autorisation d'Anne Davaille et de Judith Vatteville). (a) : la ligne moyenne issue de l'identification (en vert) superposée à l'image physique. Cette ligne correspond à l'isotherme 23,4 °C. (b) : angle mesuré.



que doit vérifier l'objet allongé, nous pouvons encore améliorer la précision et la robustesse de la méthode en contraignant le fil virtuel à vérifier cette équation [131].

Cette méthode a été développée principalement pour extraire d'une photo de fil les quantités pertinentes du point de vue de la mécanique. Nous donnerons effectivement en conclusion un exemple d'une telle application. La VIC a cependant un grand nombre d'autres utilisations potentielles. Ainsi nous l'avons également appliquée à l'extraction d'isothermes lors d'une expérience de convection thermique, où la connaissance du vecteur normal local (et donc de l'angle) est utile pour des calculs de flux thermiques.

Pour analyser de manière plus efficace les expériences de déformation de fils, et en particulier la formation de boucles, il serait utile d'étendre la méthode aux séquences d'images. Pour rendre les calculs plus rapides, il faudra utiliser au maximum l'information existante, par exemple en prenant la forme du fil déterminée pour une image donnée comme état initial du fil virtuel pour l'image suivante.

Cette méthode peut également être étendue à la mesure du module de flexibilité d'un fil de forme à vide non droite. L'idée est de prendre une photo du fil encastré horizontalement, fléchissant sous son propre poids, puis de le retourner de  $180^\circ$ . Avec ces deux images, nous disposons de suffisamment d'information pour en déduire la forme à vide et la rigidité en flexion.



# Conclusion

Le but de ma thèse a été de contribuer à une meilleure compréhension du comportement d'un objet allongé, éventuellement flexible, placée dans un écoulement confiné. Bien que cette problématique se retrouve dans un nombre important de situations, comme le déplacement des micro-organismes dans le sol ou dans des organismes pluricellulaires, ou comme l'injection de suspensions de fibres dans des fractures géologiques, beaucoup de questions sur les processus élémentaires sont en effet ouvertes.

Même dans le cas du cylindre qui est l'exemple le plus simple de tels objets, les forces hydrodynamiques avaient été essentiellement étudiées en l'absence de confinement ou avec un faible confinement. Les études existantes sur les cylindres très confinés étaient restreintes à une configuration 2D avec le cylindre perpendiculaire à l'écoulement. Dans ce cas, j'ai pu montrer qu'une modélisation 3D est indispensable pour prédire précisément la force sur le cylindre dès lors que sa longueur  $L$  est inférieure à la largeur  $W$  du canal où il est placé. En effet, le blocage de l'écoulement qui apparaît lorsque le diamètre du cylindre devient de l'ordre de l'ouverture du canal est alors réduit, parce que le fluide s'écoule préférentiellement entre les extrémités du cylindre et les parois du canal, ce qui diminue fortement la force s'exerçant sur le cylindre. J'ai pu montrer qu'une modélisation 2D est, par contre, suffisante pour prédire la force dans le cas d'un cylindre parallèle à l'écoulement moyen, et que celle-ci est alors proportionnelle à la longueur. Une conclusion de cette étude est le fait que l'influence de l'orientation du cylindre par rapport à l'écoulement moyen sur la traînée qu'il subit est nettement plus importante que dans le cas non-confiné.

Pour l'application à l'injection de fibres dans une fracture, la proportionnalité de la force à la viscosité, vérifiée pour un cylindre parallèle à l'écoulement jusqu'à un nombre de Reynolds de 50, explique (au moins en partie) que le transport d'un fil soit plus facile lorsque l'eau est remplacée par une solution aqueuse de scléroglycane (plus visqueuse que l'eau), comme cela a été mentionné en introduction.

Une des questions importantes à l'origine de mon travail était l'estimation de la force sur chaque segment d'une fibre déformée : par analogie avec le cas non-confiné [132, 133, 35, 134], la solution la plus simple est de discrétiser la fibre par un ensemble de segments, et d'estimer la force sur ces segments par la force que subirait un cylindre rigide placé à la même position, par combinaison linéaire des forces sur un cylindre parallèle (coefficient  $\lambda_{\parallel}$ ) et perpendiculaire à l'écoulement ( $\lambda_{\perp}$ ). J'ai montré qu'à cause des effets de blocage cette approche n'est *a priori* valable que si le diamètre  $D$  de la fibre est suffisamment faible. Si  $D$  est proche de la distance entre les parois, la force est essentiellement due à  $\lambda_{\perp}$  et il est important de bien prendre en compte l'effet de  $L/W$  dans son évaluation. À cause de l'importance de la valeur de ce coefficient  $\lambda_{\perp}$  pour la forme que prend la fibre, il serait intéressant de réaliser une étude complémentaire dans la limite où la longueur du cylindre est très faible devant la largeur de la cellule ( $L \ll W$ ), en régime de Stokes ainsi que pour des nombres de Reynolds plus élevés.

Un second résultat important est la mise en évidence de la grande influence de la force

de portance, notamment quand le cylindre est perpendiculaire à l'écoulement. Même aux nombres de Reynolds  $Re$  assez faibles ( $Re \leq 0,1$  dans nos expériences), elle permet de maintenir le cylindre à mi-distance des deux plaques. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, cette position devient instable, et le cylindre oscille spontanément de manière très régulière. Une des originalités de cette instabilité est son faible nombre de Reynolds seuil ( $Re \sim 20$ ), bien inférieur à celui de l'apparition des oscillations de Bénard-Von Kármán. Le seuil de l'instabilité varie de manière non triviale avec la densité du cylindre : en l'absence de gravité, le seuil est d'autant plus faible que la densité du cylindre est élevée.

Le cylindre subit une force de rappel hydrodynamique quand on le décentre : aucune force de rappel élastique extérieure n'est nécessaire pour observer ces oscillations. De plus, elles peuvent apparaître même pour un cylindre de masse nulle à cause de l'inertie du fluide entraîné. Ces deux caractéristiques distinguent encore plus cette instabilité des oscillations structurales classiques résultant de l'émission de tourbillons de Bénard-Von Kármán. Par contre, l'inertie du fluide est essentielle : j'ai prouvé que ce type d'instabilité ne peut apparaître à nombre de Reynolds nul, à cause de la linéarité des équations de Stokes. J'ai enfin montré que la position du cylindre vérifie une équation de Van der Pol, prédisant la bifurcation de Hopf du système et j'ai analysé la signification des coefficients de celle-ci. La fréquence de l'oscillation est liée à la masse totale (masse ajoutée hydrodynamique et masse du cylindre) et à une raideur liée au confinement, qui correspond à la force hydrodynamique sur un cylindre fixe décentré. Le terme moteur de l'instabilité est une force hydrodynamique de même sens que la vitesse du cylindre ; cette force associe un effet de type Bernoulli et une influence non nulle de la viscosité, comme le démontre la restabilisation des cylindres de densité élevée à des nombres de Reynolds d'environ 50.

Il sera intéressant d'étudier la stabilité de la position du cylindre jusqu'à des nombres de Reynolds supérieurs au seuil de l'émission des tourbillons de Bénard-Von Kármán, pour étudier le lien éventuel entre ces deux instabilités. En ce qui concerne le problème de l'injection d'une fibre unique dans une fracture, cette instabilité pourrait expliquer les phénomènes de dépiégeage mentionnés en introduction. (le fil est quasiment immobile par rapport au fluide lors des piégeages). En vue des applications au transport ou à la sédimentation de fibres, il sera utile de rechercher si une instabilité similaire existe quand le cylindre est convecté par l'écoulement, ou quand il sédimente.

Pour caractériser les forces qui s'exercent sur les fibres, notamment en cas de piégeage, il faut déterminer quantitativement leur forme à partir d'images expérimentales. Pour utiliser le résultat dans une modélisation mécanique, il faut non seulement connaître la position de tous les points de la fibre, mais aussi le vecteur tangent qui influence la force hydrodynamique, et la courbure locale reliée au moment fléchissant de la fibre. Parmi les nombreuses méthodes d'extraction de courbes, je n'en ai pas trouvé qui déterminait précisément toutes ces grandeurs. J'ai donc contribué au développement d'une nouvelle méthode de traitement d'image, basée sur la corrélation entre l'image de la fibre et une image virtuelle, qui permet de déterminer directement le profil d'une fibre avec une précision sub-pixel ainsi que son orientation locale et sa courbure. Ces grandeurs sont obtenues sous forme d'une série de termes analytiques utilisable pour des calculs ultérieurs. Cette méthode a été validée pour des fils longs sur des images de synthèse et des images expérimentales : elle est très robuste par rapport à un éventuel bruit de l'image, et elle donne des résultats satisfaisants même si le diamètre de la fibre ne vaut que quelques pixels. Cependant, la valeur de la courbure aux extrémités du fil n'est pas encore mesurée de manière satisfaisante. Je me suis aussi rendu compte que cette méthode peut s'appliquer à beaucoup d'autres domaines : j'ai ainsi pu déterminer avec précision des isothermes d'un panache thermique visualisés par des amas

de cristaux liquides discontinus.

## Influence de la courbure d'une fracture sur le transport d'une fibre

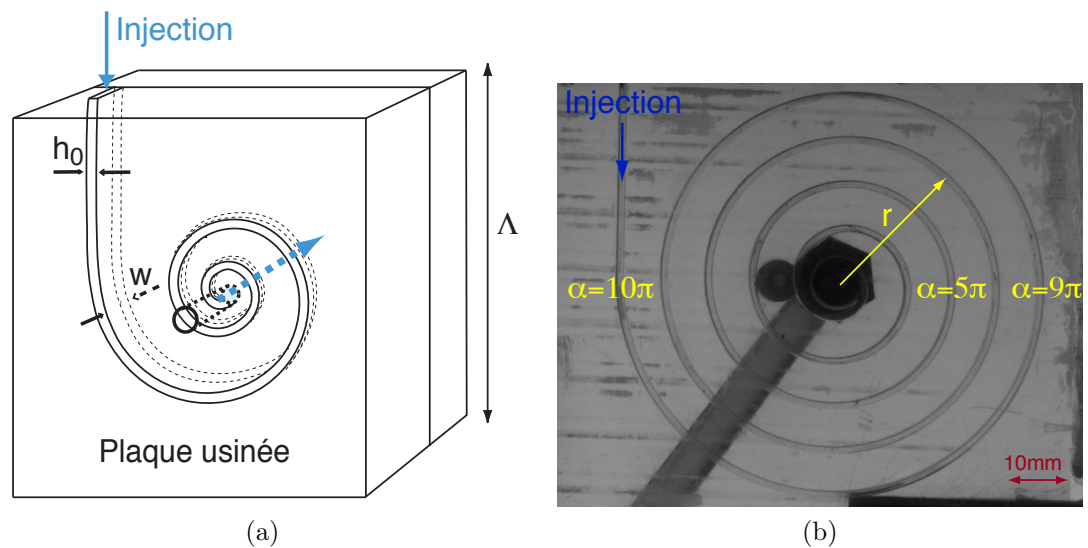


FIGURE 3.30 – Canal en forme de spirale. (a) : Schéma  $h_0 = 1$  mm,  $W = 10$  mm,  $\Lambda = 120$  mm. (b) : photographie de la spirale et définition de l'angle  $\alpha$  de la spirale, et du rayon  $r(\alpha)$ . (Expériences A.S. Anning).

Dans cette section, je vais décrire un exemple d'application des résultats présentés plus haut à l'objet initial de ma thèse, c'est-à-dire le transport d'une fibre dans une fracture, et notamment les phénomènes de piégeage. Ce transport met effectivement en jeu les forces hydrodynamiques et la déformation de la fibre, mais aussi le frottement entre celle-ci et les parois de la fracture, lorsque le diamètre du fil est comparable à l'ouverture, et que sa longueur est grande devant son diamètre. Ce frottement est particulièrement important dans les fractures rugueuses, comme nous l'avons montré en introduction.

Plus spécifiquement, nous avons étudié l'influence de la «tortuosité» de la fracture sur le transport d'un fil. En effet, une des causes possibles du piégeage est la rigidité du fil : s'il est trop rigide, il ne pourra pas se *courber* suffisamment pour traverser la fracture. Nous avons choisi une fracture modèle constituée d'un canal dont la courbure augmente progressivement, c'est-à-dire en forme de spirale. Il s'agit d'une géométrie simple qui permet néanmoins le piégeage du fil, ce qui n'est pas le cas dans les cellules de Hele-Shaw. L'ouverture du canal est constante, et donc aussi la force de traînée hydrodynamique exercée sur le fil. Par contre, la courbure locale de la spirale augmente continûment : nous nous attendons à ce que le fil se piège lorsque qu'il atteint les zones de fortes courbures de la spirale.

Les expériences présentées dans cette section ont été réalisées par A.S. Anning pendant son stage de master 1, en utilisant le dispositif expérimental schématisé dans la figure 3.30. La ligne moyenne du canal est une spirale d'Archimède, d'équation polaire  $r(\alpha) = A\alpha$ , avec  $A = 200/\pi$  mm et  $\alpha \in [0, 10\pi]$ . Cette spirale, d'ouverture  $h_0 = 1$  mm et de largeur  $W = 10$  mm est obtenue par usinage d'un bloc de PMMA. Les fils utilisés sont obtenus par

extrusion de joint silicone à travers l'aiguille d'une seringue. L'injection est contrôlée par un pousse seringue, et le fil obtenu tombe sur une plaque en mouvement rapide, afin d'éviter que le fil ne forme des boucles [135]. Cette méthode permet d'obtenir des fils dont la forme à vide est droite, ce qui n'est pas le cas des fils provenant d'une bobine. La diamètre de ces fils vaut  $D = 400 \mu\text{m}$ , ce qui est comparable à l'ouverture du canal, et leur longueur  $L$  entre 20 mm et 40 mm, ce qui est comparable au rayon de courbure de la spirale. Le module de flexion du fil est déterminé par la mesure de sa déflexion sous son propre poids [136, 137], et vaut  $J = 62 \times 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m}^2$ . Les fils sont placés verticalement dans l'entrée de la cellule dans laquelle le fluide s'écoule à débit constant (un orifice au centre de la spirale permet au fluide de s'écouler).

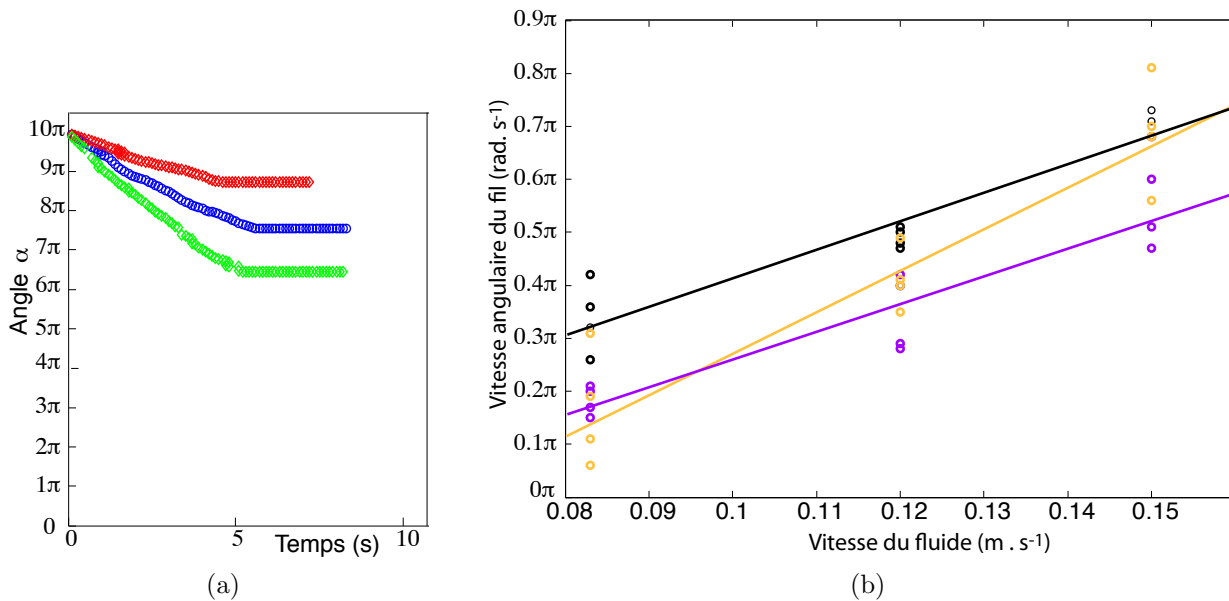


FIGURE 3.31 – Influence du débit du fluide (mélange eau-glycérol,  $\eta = 2,8 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ). (a) : variation de la position angulaire du fil dans la spirale, pour différents débits (fil de longueur 20 mm). ( $\diamond$ ) :  $50 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$ , ( $\circ$ ) :  $70 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$ , ( $\diamond$ ) :  $90 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$ . (b) : variation de la vitesse angulaire du fil en fonction de la vitesse du fluide, obtenue à partir de figures comme (a), pour différentes longueurs de fil. ( $\circ$ ) : 20 mm, ( $\circ$ ) : 30 mm, ( $\circ$ ) : 40 mm. (Expériences A.S. Anning).

Comme le montre la figure 3.31a, la position angulaire du fil varie quasiment linéairement, avant d'atteindre un plateau. Nous n'avons pas encore d'explication de cette variation linéaire. Cette variation signifie que la vitesse (en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) diminue lorsque le fil avance dans la spirale. Dans la situation étudiée, le frottement sur la paroi est très effectivement important : la vitesse du fil est toujours inférieure au dixième de la vitesse moyenne du fluide. La force hydrodynamique sur le fil peut alors être modélisée en utilisant les résultats sur les cylindres immobiles du chapitre 1. La vitesse angulaire et la distance parcourue avant l'arrêt augmentent avec le débit du fluide, ce qui est cohérent avec le fait que la force hydrodynamique augmente avec la vitesse. La vitesse angulaire est représentée en fonction de la vitesse du fluide dans la figure 3.31b, pour des fils de longueurs différentes. Le résultat obtenu n'est pas trivial : alors que pour les vitesses d'écoulement faibles les fils les plus courts se déplacent le plus vite, la vitesse du fil ne varie pas de manière monotone avec sa

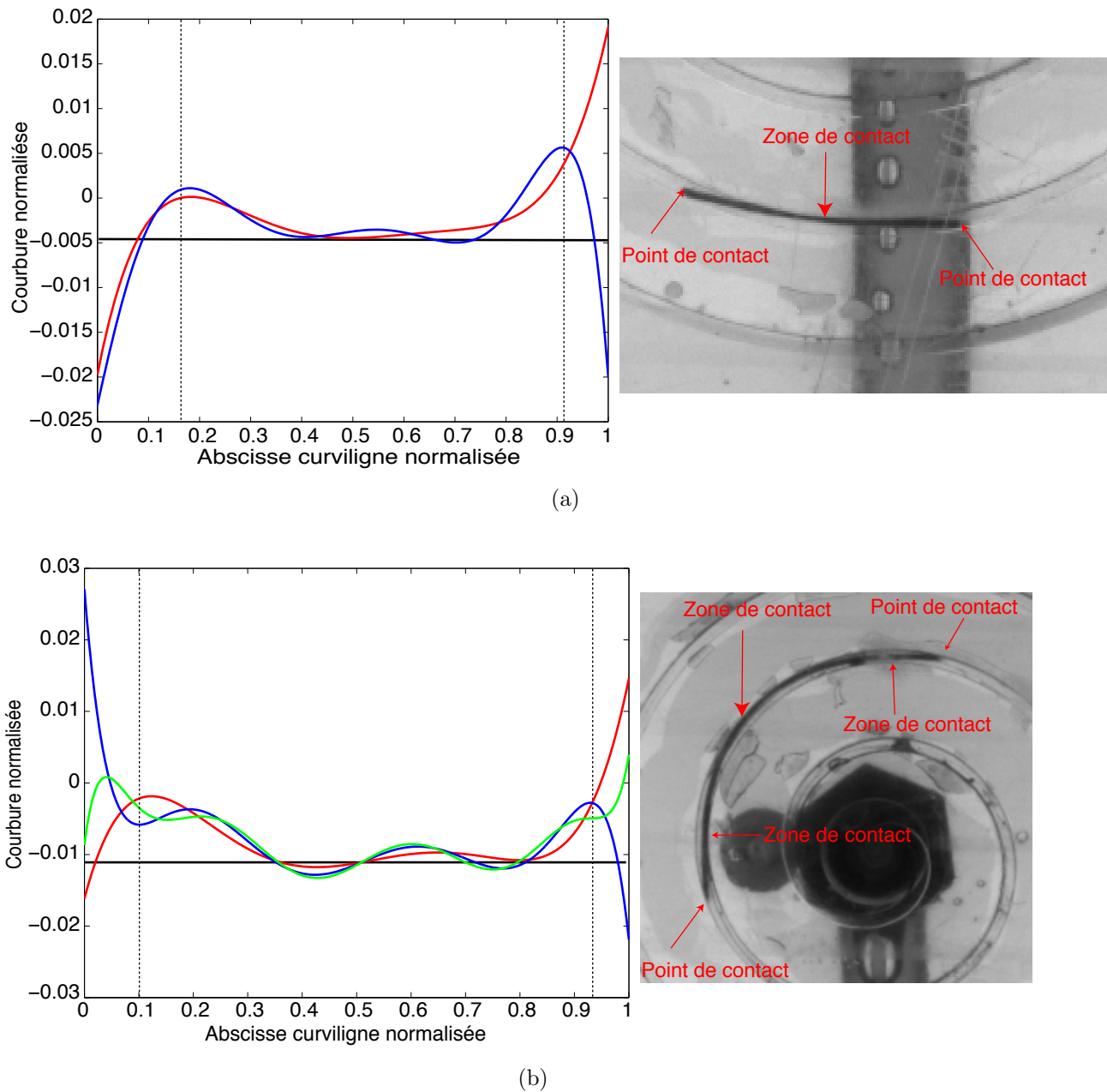


FIGURE 3.32 – Influence de la longueur du fil sur la forme du fil. (a) : variation de la courbure d'un fil de longueur 20 mm, en utilisant la méthode de traitement d'image développée au chapitre 3. (—) : série de Legendre d'ordre 5, (—) : série de Legendre d'ordre 7, (---) : courbure locale de la spirale. Image du fil dans la spirale. (b) : variation de la courbure d'un fil de longueur 40 mm. (—) : série de Legendre d'ordre 5, (—) : série de Legendre d'ordre 7, (---) : série de Legendre d'ordre 9, (---) : courbure locale de la spirale. Image du fil dans la spirale. (Expériences A.S. Anning).

longueur lorsque la vitesse du fluide est élevée.

Pour mieux comprendre ces résultats, nous avons étudié la forme des fils, notamment en utilisant la méthode de traitement d'image (VIC) développée au chapitre 3. La figure 3.32 montre la courbure locale du fil, normalisée par la longueur de celui-ci. Comme la méthode

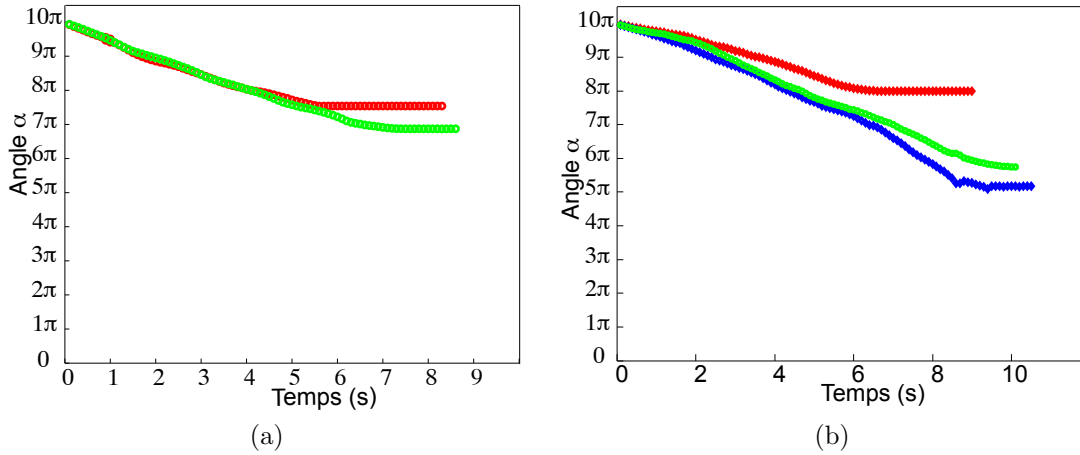


FIGURE 3.33 – Influence de la viscosité pour deux fils de longueur différente. Débit :  $70 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$ . (a) : position angulaire en fonction du temps, pour un fil de 20 mm, pour deux fluides de viscosités différentes. ( $\circ$ ) :  $\eta = 2,8 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ , ( $\odot$ ) :  $\eta = 5,0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ . (b) : position angulaire pour un fil de longueur 40 mm. ( $\diamond$ ) :  $\eta = 2,8 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ , ( $\diamond$ ) :  $\eta = 5,0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ , ( $\odot$ ) :  $\eta \approx 13 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  (solution de scléroglycane). (Expériences A.S. Anning).

VIC sous sa forme actuelle a été développée pour des fils longs, elle n'est pertinente pour les fils courts que loin des extrémités (ceci provient du choix de la série) : près des extrémités, la courbure mesurée dépend de l'ordre (arbitraire) choisi, mais les valeurs obtenues au milieu du fil sont, par contre, fiables. La courbure du fil est égale à celle de la spirale sur une zone, qui correspond à un contact entre la paroi et le fil, et elle diminue en valeur absolue près des extrémités. L'image du fil confirme l'existence de contacts ponctuels aux deux extrémités et d'une zone centrale de contact. La forme du fil de 30 mm est similaire. Par contre, la courbure du fil de 40 mm n'est pas constante sur toute la zone centrale : pour ce fil, il y a trois zones de contact et deux points de contact. Il y a ainsi plus de points de contact, mais les zones de contact sont plus courtes. Cette différence peut expliquer le changement de comportement de la mobilité des fils avec la vitesse du fluide, discuté au paragraphe précédent.

La position angulaire est représentée dans la figure 3.33 en fonction du temps pour des fluides de différentes viscosités. De manière surprenante, la vitesse angulaire est indépendante de la viscosité pour le fil de 20 mm. Par contre, la position d'arrêt est plus proche du centre de la spirale si la viscosité augmente. La force qui tire le fil dans la spirale est, bien sûr, la force de traînée hydrodynamique. La force qui freine et arrête le fil est le frottement avec la paroi ; ce frottement augmente avec la courbure du fil, car la force normale exercée sur la paroi augmente également. La valeur indépendante de la viscosité de la vitesse angulaire semble indiquer que le coefficient de frottement pendant le mouvement est proportionnel à la viscosité, et qu'il ne s'agit pas d'un frottement sec. Par contre, à l'arrêt, le fil subit un frottement sec qui est indépendant de la viscosité. Pour le fil de 40 mm, la vitesse angulaire n'est indépendante de la viscosité que si celle-ci est suffisante : à faible vitesse, il est possible que le contact ne soit pas complètement lubrifié, expliquant une vitesse angulaire plus faible.

Ces expériences préliminaires montrent le caractère non-trivial du transport d'un fil dans une géométrie confinée, même très simplifiée.



## Perspectives

L'étude que j'ai menée s'insère dans le cadre plus général des travaux sur le déplacement d'objets, en particulier allongés, tels que des suspensions de fibres ou de microorganismes dans les écoulements confinés.

Les résultats obtenus sur les forces agissant sur des cylindres placés dans un écoulement représentent une première étape vers le dimensionnement de l'injection de fibres optiques dans une fracture géologique et pour la compréhension du colmatage des fractures par des suspensions de fibres. Ils permettront également de mieux connaître les forces agissant sur des biofilms dans des micro-canaux. Pour ces applications, il sera utile d'étendre ces résultats à une gamme plus large de nombre de Reynolds et à des fibres présentant de fortes courbures.

Les résultats obtenus sur la stabilité de la position de la fibre dans l'ouverture ont tout d'abord des conséquences importantes pour les applications au transport de fibres en géométrie confinée, puisque les oscillations de la fibre peuvent la dépiéger. De plus, l'instabilité oscillatoire observée constitue un exemple original de couplage fluide-structure, qui diffère en particulier des instabilités classiques de cylindres, liées à l'émission de tourbillons de Bénard-von Kármán. Il sera intéressant de comparer plus en détail les caractéristiques observées à celles à celles des instabilités plus classiques, et d'étudier quelle est la transition entre ces instabilités en fonction notamment du nombre de Reynolds ou du diamètre du cylindre.

La méthode de traitement d'images que j'ai contribué à développer est déjà très satisfaisante pour la plupart des applications, y compris celles qui nécessitent la mesure de l'angle ou la courbure locale. Seule la courbure près des extrémités reste mal mesurée, ce qui est problématique pour les fils courts. Une optimisation de la base choisie permettra probablement de régler ce problème. Le domaine d'utilisation potentiel de cette méthode est en fait beaucoup plus large et inclut la détermination du profil de tout objet unidimensionnel lisse : des applications à la géographie (extraction de la forme d'une rivière) et au domaine biomédical (extraction de la forme de vaisseaux sanguins) sont envisagés. De plus, une modification simple du profil du fil virtuel permet de mesurer un contour : la méthode a déjà été utilisée avec succès pour suivre l'interface d'une éprouvette métallique soumis à un test de traction à chaud.

Pour comprendre les expériences de transport de fil dans un canal en forme de spirale, et en général les expériences de transport de fils en fractures, nous disposons donc à l'issue de cette thèse d'une modélisation, au moins au premier ordre, des forces hydrodynamiques qui s'exercent sur le fil. Nous savons déterminer la forme d'un fil à partir d'une image expérimentale, ce qui permet de tester les modèles développés. Le seul aspect important que nous n'avons pas étudié en détail est la nature du frottement entre la paroi et le fil. Les expériences dans la spirale semblent indiquer que ce frottement n'est pas toujours un simple frottement sec. L'étude du frottement que subit le fil devra donc constituer une prochaine étape de l'étude du transport de fils par un écoulement en géométrie confinée.



# Annexe A

## Équations de base de la mécanique des fluides et de la mécanique des fils

Nous rappelons ci-dessous les équations de base de la mécanique des fluides et de la mécanique des fils.

### A.1 Équations du mouvement d'un fluide

Le champ de vitesse d'un fluide vérifie l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\rho_f \mathbf{V}}{dt} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{V}$  la vitesse (locale) du fluide et  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte. Pour un fluide newtonien (et incompressible), la contrainte s'écrit [35] :

$$\sigma_{ij} = \eta \left( \frac{\partial V_i}{\partial r_j} + \frac{\partial V_j}{\partial r_i} \right) - p\delta_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

où  $\sigma_{ij}$  est la contrainte selon la direction  $i$  sur une surface élémentaire de direction  $j$  et  $p$  la pression et où  $r_i$  est la coordonnée  $x$ ,  $y$  ou  $z$  selon la valeur de  $i$ . L'équation de la conservation de la quantité de mouvement est dans ce cas l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \rho_f \mathbf{V}}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{grad}(p) + \eta \Delta \mathbf{V}. \quad (\text{A.3})$$

Cette équation est complétée par l'équation d'incompressibilité :

$$\text{div}(\mathbf{V}) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Lorsque le nombre de Reynolds est faible, ou lorsque l'écoulement est parallèle, l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes :

$$\eta \Delta \mathbf{V} = \mathbf{grad}(p). \quad (\text{A.5})$$

Les forces hydrodynamiques, qui s'exercent sur un solide, se calculent à partir de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  par :

$$F_i = \int_{Surface} \sigma_{ij} n_j, \quad (\text{A.6})$$

où  $\mathbf{n}$  (dont la composante selon  $j$  est  $n_j$ ) le vecteur normal à la surface du solide, au point considéré.

## A.2 Équations de la statique des fils

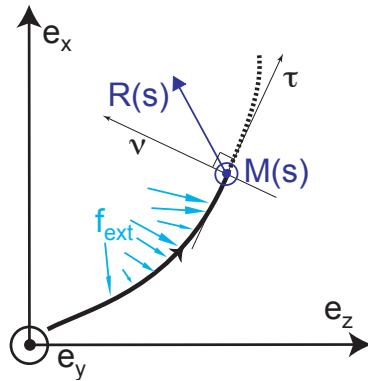


FIGURE A.1 – Schéma des forces et moments sur un fil 2D.

Dans les expériences présentées, la longueur du fil est constante : nous utilisons donc un modèle de fil flexible inextensible, qui est un des modèles classiques de fils [138]. Pour un fil inextensible, l'abscisse curviligne  $s$  d'un point matériel est le même pour toutes les configurations. Nous donnons uniquement les équations d'un fil statique 2D, puisque dans les expériences que nous analysons, le mouvement du fil est quasistatique et sa déformation essentiellement 2D. La forme d'un fil statique est donnée par les lois de Newton appliquées à un élément infinitésimal du fil [136] :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{ds} &= \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \frac{dM}{ds} &= (\mathbf{R} \wedge \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur tangent au fil,  $\mathbf{R}(s_0)$  la force interne au fil, la force qu'exerce la partie  $s > s_0$  sur la partie  $s < s_0$ ,  $M$  le moment fléchissant du fil et  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  la force extérieure s'exerçant sur le fil, par unité de longueur (voir Fig. A.1). Cette équation est complétée par l'équation d'élasticité linéaire du fil :

$$M = J(\gamma - \gamma_0) \quad (\text{A.8})$$

où  $J$  est la rigidité en flexion du fil,  $\gamma$  sa courbure,  $\gamma_0$  sa courbure à vide (courbure en l'absence de forces extérieures).

# Annexe B

## Méthode numérique

### B.1 Introduction

Nous résolvons numériquement le problème couplé de l'écoulement et du mouvement du cylindre, à l'aide d'une méthode d'éléments finis.

Nous cherchons à résoudre l'équation du mouvement du fluide (équation de Navier-Stokes) et celle du solide, avec les contraintes que le fluide est incompressible, que le cylindre est rigide et qu'il ne peut pas se déplacer parallèlement à l'écoulement moyen (à cause des fils de suspension). Ce problème est réécrit de manière à utiliser des espaces fonctionnels non contraints, afin de pouvoir implanter la méthode numérique sous un solveur standard (nous avons choisi d'utiliser le logiciel libre **FreeFem++** [64]).

Le problème variationnel est écrit sur tout le domaine fluide *et* solide, et contient intrinsèquement le couplage mécanique entre le fluide et le solide [139]. La dynamique du fluide et du solide sont ainsi résolus simultanément.

Cette méthode diffère de celle qui est classiquement utilisée en aéronautique, où le champ de vitesse du fluide est calculé en fixant la vitesse du solide (celle de l'itération précédente). La force hydrodynamique s'exerçant sur le solide est ensuite obtenue à partir de ce champ de vitesse. Enfin, la vitesse du solide est mise à jour, en utilisant la deuxième loi de Newton. Cette méthode de résolution s'appuie sur la séparation d'échelle entre la masse volumique, et donc l'inertie, du fluide (air) et celle du solide. La vitesse du cylindre varie lentement par rapport à celle du fluide : le solide impose une condition cinématique, et le fluide une condition dynamique [84]. Dans le problème que nous étudions, cette séparation d'échelle n'existe pas, le solide et le fluide sont fortement couplés. L'approche qui consiste à séparer la résolution du problème fluide et celle du problème solide est instable numériquement [140].

### B.2 Modèle

Nous considérons le domaine rectangulaire  $\Omega$  représenté à la figure B.1. Le fluide rentre par le bord  $\partial\Omega_1$  et sort par le bord  $\partial\Omega_3$ . Les bords  $\partial\Omega_2$  et  $\partial\Omega_4$  correspondent aux plaques. Le bord du domaine  $\Omega$  est  $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \partial\Omega_i$ . Le disque  $C$  correspond au cylindre, contenu strictement dans  $\Omega$ . Le domaine fluide est  $\Omega_f = \Omega \setminus C$ .

Dans la résolution numérique, toutes les équations présentées sont adimensionnées par la distance entre les plaques  $h_0$ , la vitesse moyenne du fluide  $U_m$  et la masse volumique du fluide  $\rho_f$ , de sorte que la viscosité dynamique  $\eta$  soit égale à  $1/Re$  par exemple.

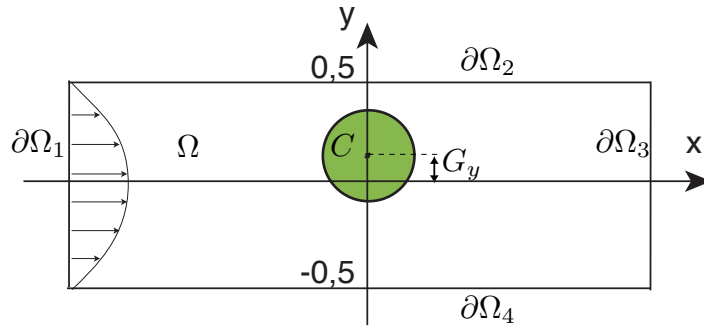


FIGURE B.1 – Schéma du domaine utilisé pour la résolution 2D du problème de couplage entre le cylindre et le fluide.

### B.2.1 Domaine fluide

Le mouvement du fluide est régi par l'équation de Navier-Stokes (Éq. (B.1)) et l'équation d'incompressibilité (Éq. (B.2)) :

$$\frac{d\rho_f \mathbf{V}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \text{ dans } \Omega_f, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ dans } \Omega_f, \quad (\text{B.2})$$

où  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide et  $\mathbf{V}$  la vitesse du fluide. Pour un fluide newtonien, la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  s'exerçant sur une particule de fluide vaut :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{V}) - p \text{Id}, \quad (\text{B.3})$$

où  $p$  désigne le champ de pression, Id la matrice identité et où

$$\mathbf{D}(\mathbf{V}) = \frac{\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T}{2}. \quad (\text{B.4})$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{Poiseuille}} = -6(y - 0,5)(y + 0,5)\mathbf{e}_x \text{ sur } \partial\Omega_1, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4, \quad (\text{B.6})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_3, \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_C \text{ sur } \partial C. \quad (\text{B.8})$$

Nous choisissons un profil de Poiseuille, de valeur moyenne 1, en entrée (Éq. (B.5)). La condition de sortie est une condition de sortie libre (Éq. (B.7)). La vitesse relative entre le fluide et les solides est nulle (Éq. (B.6) et Éq. (B.8)); nous appelons  $\mathbf{V}_C$  la vitesse du cylindre.

### B.2.2 Cylindre

Les équations vérifiées par le cylindre s'écrivent :

$$\nabla \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ dans } C, \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_x = 0 \text{ dans } C, \quad (\text{B.10})$$

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \int_{\partial C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + N_{\text{fil}} \mathbf{e}_x + \int_C \mathbf{f}_C, \quad (\text{B.11})$$

où  $M = \rho_s ||C||$  désigne la masse du cylindre,  $\rho_s$  la masse volumique du solide,  $\mathbf{e}_x$  le vecteur unitaire selon  $x$  (voir Fig. B.1 ),  $N_{\text{fil}}\mathbf{e}_x$  la tension du fil et  $\mathbf{f}_C$  la force extérieure par unité de surface qui s'exerce sur le cylindre (le poids par exemple) .

Le cylindre est un solide indéformable, sans mouvement de rotation (cette rotation est empêchée expérimentalement). La vitesse est donc uniforme à l'intérieur du cylindre (Éq. (B.9)). À cause du fil, le cylindre est immobile selon l'axe  $x$  (Éq. (B.10)). La seconde loi de Newton, appliquée au cylindre est donnée par l'équation (B.11).

## B.3 Formulation variationnelle continue

Nous introduisons les espaces suivants, dont certains dépendent implicitement du temps :

$$\begin{aligned} H &= \{ \mathbf{V} \in H^1(\Omega)^2, \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{Poiseuille}} \text{ sur } \partial\Omega_1, \\ &\quad \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{H} = \{ \mathbf{V} \in H^1(\Omega)^2, \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \}, \quad (\text{B.13})$$

$$K_C = \{ \mathbf{V} \in H^1(\Omega)^2, \nabla \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ p.p. dans } C \}, \quad (\text{B.14})$$

$$K_{\nabla} = \{ \mathbf{V} \in H^1(\Omega)^2, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \}, \quad (\text{B.15})$$

$$\Lambda_{\nabla} = \{ p \in L^2(\Omega), \int_C p = 0 \}, \quad (\text{B.16})$$

$$K_x = \{ \mathbf{V} \in H^1(\Omega)^2, \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ p.p. dans } C \}, \quad (\text{B.17})$$

L'espace  $H$  est l'espace qui prend en compte les conditions aux limites de Dirichlet pour la vitesse sur la frontière extérieure de  $\Omega$ , et  $\tilde{H}$  l'espace correspondant avec une condition de vitesse nulle en entrée ( $\partial\Omega_1$ ). L'espace  $K_C$  correspond aux mouvements uniformes à l'intérieur du cylindre, l'espace  $K_{\nabla}$  correspond aux champs à divergence nulle et  $\Lambda_{\nabla}$  est l'espace associé à la pression. L'espace  $K_x$  est utilisé pour approcher la contrainte liée à l'équation B.10. Fixer cette contrainte revient à prendre en compte l'effet de la tension du fil, qui physiquement s'ajuste à chaque instant à la valeur nécessaire pour que le cylindre soit immobile dans la direction  $x$ .

### B.3.1 Domaine fluide : équations de Navier-Stokes

En multipliant l'équation de Navier-Stokes par une fonction test  $\mathbf{u} \in \tilde{H} \cap K_C \cap K_x$ , et en intégrant sur le domaine fluide  $\Omega_f$ , nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega_f} \frac{d\rho_f \mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Une intégration par partie donne :

$$\int_{\Omega_f} \frac{d\rho_f \mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{u} + 2\eta \int_{\Omega_f} \mathbf{D}(\mathbf{V}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) - \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot \mathbf{u} - \int_{\partial(\Omega_f)} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{B.19})$$

où nous utilisons l'équation (B.3) la symétrie de  $\mathbf{D}(\mathbf{V})$ . Le terme  $\int_{\partial(\Omega_f)} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}$  est nul sur  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4$  parce que  $\mathbf{u}$  y est nul et sur  $\partial\Omega_3$  parce que  $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Par contre, ce terme n'est pas nul sur la surface du cylindre.

### B.3.2 Cylindre

En utilisant l'équation B.11 et en multipliant par une fonction test  $\mathbf{u}$ , nous obtenons :

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \left( \int_{\partial C} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{u} + N_{\text{fil}} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u} + \left( \int_C \mathbf{f}_C \right) \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{B.20})$$

Nous définissons  $\lambda$  par :

$$N_{\text{fil}} \mathbf{e}_x = -\lambda \int_C \mathbf{e}_x. \quad (\text{B.21})$$

En utilisant le fait que  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{u}$  sont constants dans  $C$  nous obtenons :

$$\int_C \frac{d\rho_s \mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \int_{\partial C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} - \lambda \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{u} + \int_C \mathbf{f}_C \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{B.22})$$

### B.3.3 Formulation globale

Nous écrivons une forme variationnelle sur tout le domaine  $\Omega$ . Nous posons  $\rho = \rho_f \chi_f + \rho_C \chi_C$  et  $\mathbf{f} = \chi_C \mathbf{f}_C$ , où  $\chi$  désigne la fonction indicatrice et l'indice  $f$  le domaine fluide. En substituant l'expression de  $\int_{\partial C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}$ , obtenue grâce à l'équation (B.22) dans l'équation (B.19), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \frac{d\rho \mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{u} + 2\eta \int_{\Omega_f} \mathbf{D}(\mathbf{V}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) - \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \lambda \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{u} = 0. \quad (\text{B.23})$$

Cette substitution prend en compte le signe de la normale extérieure  $\mathbf{n}$  sur le cylindre n'est pas le même pour le domaine fluide et pour le cylindre. Comme  $\mathbf{u}$  est constant à l'intérieur du cylindre ( $\mathbf{u} \in K_C$ ), il est possible d'étendre les deuxième et troisième intégrales à tout le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \frac{d\rho \mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{u} + 2\eta \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{V}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \lambda \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{u} = 0. \quad (\text{B.24})$$

La variable  $p$  est étendue à tout le domaine  $\Omega$ , mais ne correspond à la pression que dans le domaine fluide. Les autres conditions s'écrivent sous forme duale :

$$q \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \forall q \in \Lambda_{\nabla}, \quad (\text{B.25})$$

$$\mu \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{V} = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.26})$$

Les équations (B.24), (B.25) et (B.26) donnent un cadre théorique au modèle physique, et suggèrent qu'il faut choisir  $p \in \Lambda_{\nabla}$  et  $\mathbf{V} \in H \cap K_C \cap K_{\nabla} \cap K_x$ .

Les équations (B.26) et (B.24) montrent que le problème est de type point selle, et que  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'absence de mouvement selon  $x$ . Les équations (B.25) et (B.24) traduisent le problème de point selle classique lié à l'incompressibilité du fluide.

## B.4 Discrétisation

### B.4.1 Déplacement du maillage et méthode Euler-Lagrange arbitraire (ALE)

Dans le problème que nous traitons, la frontière du cylindre  $\partial C$  se déplace au cours du temps, pour des nombres de Reynolds supérieurs au nombre de Reynolds critique. Afin



de mieux respecter la géométrie, nous maillons de manière précise la frontière du cylindre  $\partial C$ . À cause du mouvement du cylindre, il est nécessaire de déplacer le cylindre et donc le maillage. Pour traiter le déplacement du maillage, nous utilisons la formulation ALE («Arbitrary Lagrangian Eulerien»)[141, 142, 143, 144]. Cette formulation permet d'éviter le remaillage, qui est coûteux en temps de calcul. De plus, elle ne nécessite pas d'interpolation, ce qui évite de perdre de l'information à chaque déplacement du maillage.

Nous notons  $\Omega_{f,t}$  le domaine fluide au temps  $t$ , et nous choisissons comme domaine fluide de référence  $\hat{\Omega}_f$ , le domaine fluide lorsque le cylindre est centré. Nous introduisons une transformation  $\hat{\mathcal{A}}_t$  (appelée transformation ALE), qui permet de passer de  $\hat{\Omega}_f$  à  $\Omega_{f,t}$  :

$$\hat{\mathcal{A}}_t : \hat{\Omega}_f \rightarrow \Omega_{f,t}, \quad \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}). \quad (\text{B.27})$$

Cette transformation sera supposée inversible. La vitesse du domaine est donnée par :

$$\hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}_f. \quad (\text{B.28})$$

Pour une fonction  $\psi$  définie sur  $\Omega_{f,t}$ , nous définissons la fonction  $\hat{\psi}$  par :

$$\hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \psi(\hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}), t). \quad (\text{B.29})$$

Par exemple, nous avons  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ . La transformation  $\hat{\mathcal{A}}_t$  est arbitraire, mais la vitesse des frontières du domaine doit être respectée pour tout temps  $t$  :

$$\mathbf{c}(\cdot, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega_{f,t}, \quad (\text{B.30})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale au domaine  $\Omega_{f,t}$  et où  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  désigne la vitesse du fluide au temps  $t$ . Nous étendons la transformation  $\hat{\mathcal{A}}_t$  à tout le domaine  $\Omega_t$  (fluide et cylindre), en prenant une vitesse uniforme à l'intérieur du cylindre :

$$\hat{\mathcal{A}}_t : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_t, \quad \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}). \quad (\text{B.31})$$

La dérivée ALE de la fonction  $\psi$  est définie par :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(\hat{\mathcal{A}}_t^{-1}(\mathbf{x}), t). \quad (\text{B.32})$$

Les formules de changement de variables permettent d'exprimer la dérivée ALE de  $\psi$  en fonction de la dérivée partielle ordinaire :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{B.33})$$

#### B.4.1.1 Maillage

Au niveau discret, nous définissons un maillage de référence  $\hat{T}_h$  (maillage de  $\hat{\Omega}$ ). La transformation  $\hat{\mathcal{A}}_t$  est discrétisée, et cette transformation discrète définit le déplacement du maillage. Par exemple, un nœud  $i$  du maillage de position  $\hat{\mathbf{x}}_i$  dans  $\hat{T}_h$  se trouve en  $\mathbf{x}_i = \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{\mathbf{x}}_i)$  dans le maillage  $T_h^t$  au temps  $t$ . Des exemples de maillages sont donnés en figure B.2. La présence de triangles d'aire faible dégrade le conditionnement de la matrice de rigidité, ce qui justifie l'utilisation d'un solveur direct (**C**roust).

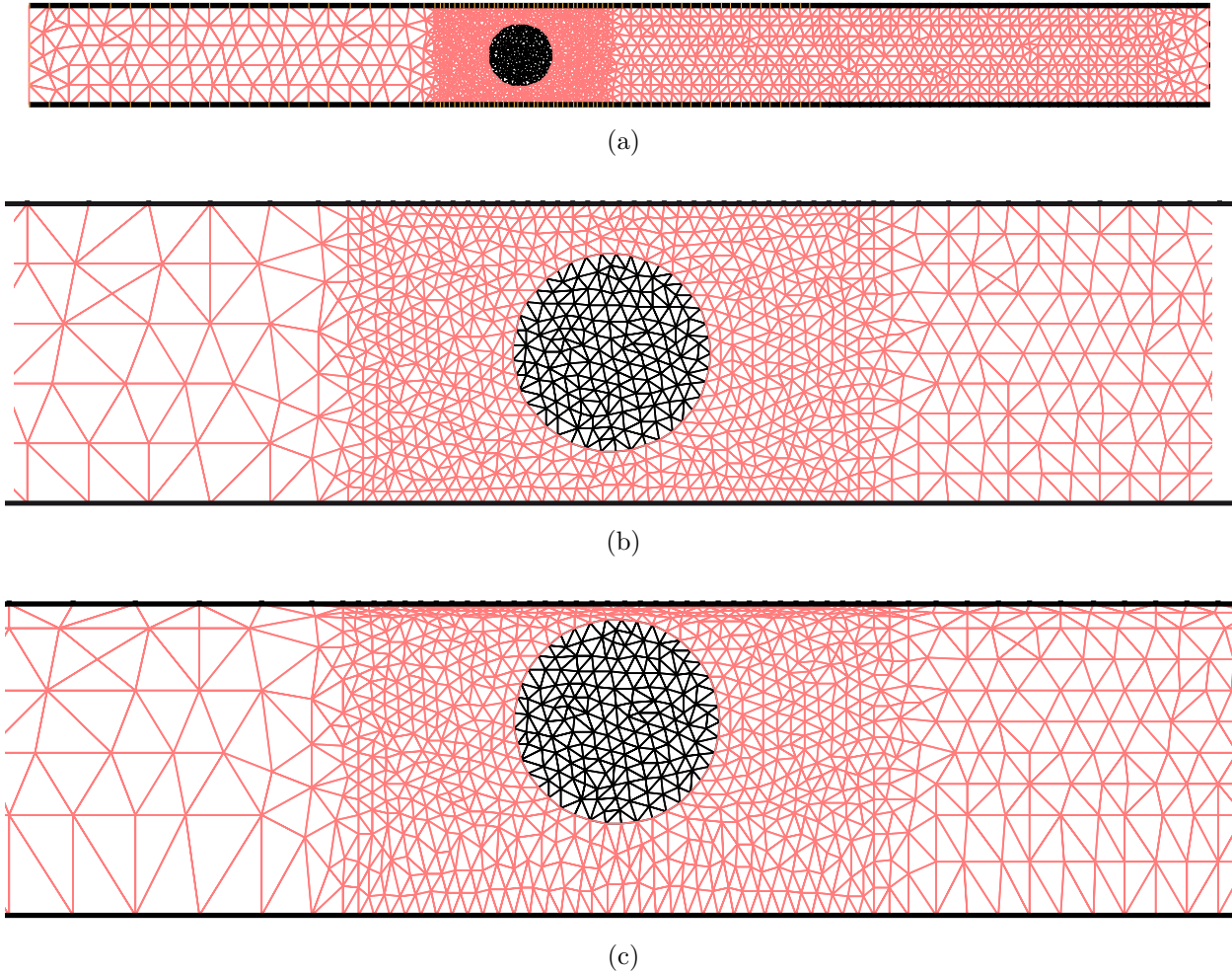


FIGURE B.2 – Exemples de maillage ( finesse du maillage  $m = 5$ ). (a) : maillage de référence (cylindre centré, soit  $G_y = 0$ ); (b) : zoom du maillage précédent; (c) : zoom du maillage après déplacement  $G_y = 0, 1$ .

Le maillage est obtenu à partir du maillage de référence  $\hat{\Omega}$  en choisissant une transformation affine par morceaux; ce déplacement permet de garantir que les triangles ne se retournent pas, même pour un déplacement qui amène le cylindre très près de la paroi. Le domaine est séparé en trois bandes :  $B_b$  en-dessous du cylindre ( $y \leq G_y - R$ ),  $B_m$  au niveau du cylindre ( $G_y - R \leq y \leq G_y + R$ ) et  $B_h$  au-dessus ( $G_y + R \leq y$ ). Le champ de déplacement  $d$  par rapport au domaine de référence  $\hat{\Omega}$ , vaut :

$$d = \frac{G_y(y + 0,5)}{0,5 - R + G_y} \chi_{B_b} + G_y \chi_{B_m} + \frac{-G_y(y - 0,5)}{0,5 - R - G_y} \chi_{B_h}. \quad (\text{B.34})$$

Un maillage obtenu après déplacement est présenté en figure B.2c.

#### B.4.1.2 Calcul du terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes

Nous choisissons de traiter le terme d'advection par une méthode des caractéristiques, qui est connue pour sa stabilité (pas de condition CFL)[142]. Cette méthode, classique pour un problème écrit sur un maillage fixe, ne l'est pas lorsque le maillage se déplace. Afin d'étendre la méthode au formalisme ALE, et en s'inspirant de [142], nous écrivons la caractéristique

sur un autre domaine de référence, le domaine à un instant  $\tau$  donné. Nous introduisons ainsi  $\mathcal{A}_{\tau,t}$  la transformation entre  $\Omega_\tau$  et  $\Omega_t$  :

$$\mathcal{A}_{\tau,t} : \Omega_\tau \rightarrow \Omega_t, \quad \mathcal{A}_{\tau,t}(\mathbf{x}) = \hat{\mathcal{A}}_t \circ \hat{\mathcal{A}}_\tau^{-1}(\mathbf{x}). \quad (\text{B.35})$$

Toute fonction  $\psi$  définie sur  $\Omega_t$  peut être écrite sur le domaine  $\Omega_\tau$  :

$$\psi_\tau(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathcal{A}_{\tau,t}(\mathbf{x}), t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\tau. \quad (\text{B.36})$$

Nous désignons par  $\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_\tau$  la dérivée en temps ALE par rapport à un point fixe dans  $\Omega_\tau$  :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_\tau (\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi_\tau}{\partial t} (\mathcal{A}_{t,\tau}(\mathbf{x}), t). \quad (\text{B.37})$$

Notons que nous avons unicité de la dérivée ALE, *i.e.* :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_\tau = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}, \quad \forall \tau, \quad (\text{B.38})$$

ce qui signifie que la dérivée ALE peut être définie par rapport à n'importe quel domaine fixe  $\Omega_\tau$ . Cette propriété se démontre en remarquant que :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_\tau (\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} (\mathbf{x}, t) + \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{\tau,t}}{\partial t} (\mathcal{A}_{t,\tau}, t) \right) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}, t), \quad (\text{B.39})$$

et que :

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{\tau,t}}{\partial t} (\mathbf{x}) = \frac{\partial (\hat{\mathcal{A}}_t \circ \hat{\mathcal{A}}_\tau^{-1})}{\partial t} (\mathbf{x}) = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial t} (\hat{\mathcal{A}}_\tau^{-1}(\mathbf{x})) = \hat{\mathbf{c}}_t(\hat{\mathcal{A}}_\tau^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{c}_t(\mathcal{A}_{\tau,t}(\mathbf{x})). \quad (\text{B.40})$$

Nous obtenons alors (B.38) par comparaison avec (B.33).

L'équation de Navier-Stokes se réécrit en formalisme ALE à l'instant  $t$  :

$$\left. \frac{\partial \rho_f \mathbf{V}}{\partial t} \right|_\tau + ((\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \nabla) (\rho_f \mathbf{V}) - \eta \Delta \mathbf{V} + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega_t. \quad (\text{B.41})$$

La validité de cette expression peut être vérifiée pour deux cas particuliers. Tout d'abord, si le maillage est immobile  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , le domaine est constant au cours du temps et la dérivée ALE est égale à la dérivée eulérienne : nous retrouvons la forme classique de l'équation de Navier-Stokes. Si la vitesse du maillage est égale à la vitesse du fluide, la dérivée ALE est égale à la dérivée totale (dérivée lagrangienne), et le terme  $((\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \nabla) (\rho_f \mathbf{V})$  est effectivement nul.

Dans la formulation variationnelle (B.24), le terme d'advection se réécrit :

$$\frac{d\rho \mathbf{V}}{dt} = \left. \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} \right|_\tau + ((\mathbf{V} - \mathbf{c}) \cdot \nabla) (\rho \mathbf{V}). \quad (\text{B.42})$$

La caractéristique  $\hat{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{x}; \cdot)$  est définie pour  $\mathbf{x} \in \Omega_\tau$  par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}_\tau(\tau, \mathbf{x}; s)}{\partial s} = (\mathbf{V}_\tau - \mathbf{c}_\tau)(\mathbf{X}_\tau(\tau, \mathbf{x}; s), s), \\ \mathbf{X}_\tau(\tau, \mathbf{x}; \tau) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

### B.4.2 Discrétisation en temps

Le temps est discrétisé de manière uniforme  $t^n = n\Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps (typiquement  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ). Nous supposons le champ de vitesse connu au temps  $t^n$ , et nous cherchons sa valeur au temps  $t^{n+1}$  (le problème est initialisé en résolvant l'équation de Stokes). Nous notons par un indice  $n$  l'approximation des variables au temps  $t^n$  (par exemple  $\mathbf{V}_n \simeq \mathbf{V}(t^n)$ ). La transformation ALE est discrétisée en temps, l'approximation de  $\hat{\mathcal{A}}_{t^n}$  est notée  $\hat{\mathcal{A}}_n$  et celle de  $\mathcal{A}_{t^{n'}, t^n}$  est notée  $\mathcal{A}_{n', n}$ .

Nous choisissons  $\tau = t^{n+1}$ , et nous linéarisons le problème de Cauchy (B.43) :

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial s}(t^{n+1}, \mathbf{x}, s) \simeq (\mathbf{V}_{n+1}^n - \mathbf{c}_{n+1}^n)(\mathbf{x}). \quad (\text{B.44})$$

Le pied de la caractéristique  $\mathbf{X}_{n+1}(t^{n+1}, \mathbf{x}, t^n)$  est donc approché par :

$$\mathbf{X}_{n+1}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t (\mathbf{V}_{n+1}^n - \mathbf{c}_{n+1}^n)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{n+1}. \quad (\text{B.45})$$

Le terme d'advection (voir Éq. (B.42)) est alors approché par :

$$\frac{1}{\Delta t} \left( (\rho^{n+1} \mathbf{V}^{n+1})(\mathbf{x}) - (\rho_{n+1}^n \mathbf{V}_{n+1}^n)(\mathbf{X}_{n+1}^n(\mathbf{x})) \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{n+1}. \quad (\text{B.46})$$

Le maillage du domaine  $\hat{\Omega}$  est noté  $\hat{T}_h$ , et celui du domaine  $\Omega^n$  est noté  $T_h^n$ . L'équation (B.46) met en jeu des termes de type  $\psi_{n+1}^n = \psi^n \circ \mathcal{A}_{n+1, n}$ . Dans les méthodes d'éléments finis, les variables sont représentées par leur valeur aux nœuds  $i$  du maillage (et éventuellement en d'autres points, comme es barycentres des nœuds du maillage). Pour obtenir  $\psi_{n+1}^n$ , il suffit de conserver la valeur de  $\psi^n$  (résultat au pas  $n$  et calculée sur  $T_h^n$ ) au nœud  $i$  pendant le déplacement du maillage de  $T_h^n$  à  $T_h^{n+1}$ . Dans **FreeFem++**, ceci revient à recopier les tableaux correspondant à  $\psi$  après mis à jour du maillage. À cause de la manière dont est codé **FreeFem++**, il faut veiller à réinitialiser à zéro les tableaux avant copie (voir Fig. B.3), afin qu'ils soient définis sur le nouveau maillage.

```
Th = movemesh(Th0 ,[x,y+d]); // Mise a jour du maillage
// Densite
rhoprec=0.; // Reinitialisation du tableau
rhoprec[]=rho[]; // Copie des valeurs
```

FIGURE B.3 – Mise à jour du tableau contenant les valeurs de la densité, dans **FreeFem++**. Ici `rhoprec` est défini sur le nouveau maillage  $T_h^{n+1}$  alors que `rho` est encore défini sur le maillage précédent  $T_h^n$ .

Ensuite, l'advection est réalisée grâce à la fonction `convect` de **FreeFem++**.

### B.4.3 Contrainte liée à la rigidité du cylindre

Il n'est pas possible de choisir dans **FreeFem++** des éléments finis qui vérifient la contrainte de rigidité du cylindre  $\nabla \mathbf{V} = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire dans  $K_C$ .

La contrainte de mouvement rigide est gérée par pénalisation. L'idée est de choisir une base d'éléments finis dans  $H \cap K_x$ , et d'ajouter un terme dans la formulation variationnelle qui contraint le champ de vitesse à être constant dans le cylindre.

Le problème variationnel (B.24) peut se réécrire sous forme de la minimisation d'une fonctionnelle  $J^{n+1}(\mathbf{u})$  :

$$\begin{aligned} J^{n+1}(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \rho^{n+1} \mathbf{u}^2 - \int_{\Omega^{n+1}} \left( (\rho_{n+1}^n \mathbf{u}_{n+1}^n) \circ \mathbf{X}_{n+1}^n \right) \cdot \mathbf{u} \\ & + \eta \Delta t \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \lambda(\Delta t) \mathbf{e}_x \cdot \int_{C^{n+1}} \mathbf{u} - \Delta t \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

où le seul exposant qui indique un carré est celui  $\mathbf{u}^2$ . La solution de (B.24) minimise  $J^{n+1}(\mathbf{u})$  :

$$\mathcal{P} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V} \in H \cap K_{\nabla} \cap K_C, \\ J^{n+1}(\mathbf{V}) = \min_{\mathbf{u} \in H \cap K_{\nabla} \cap K_C} J^{n+1}(\mathbf{u}). \end{array} \right. \quad (\text{B.48})$$

Le problème de minimisation  $\mathcal{P}$  est approché par le problème suivant :

$$\mathcal{P}_{\epsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{\epsilon} \in H \cap K_{\nabla}, \\ J_{\epsilon}^{n+1}(\mathbf{V}_{\epsilon}) = \min_{\mathbf{u} \in H \cap K_{\nabla}} J_{\epsilon}^{n+1}(\mathbf{u}), \end{array} \right. \quad (\text{B.49})$$

où

$$J_{\epsilon, n+1}(\mathbf{u}) = J_{n+1}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\epsilon} \int_C \nabla(\mathbf{u}) : \nabla(\mathbf{u}). \quad (\text{B.50})$$

Le paramètre  $\epsilon$  est choisi petit (typiquement  $10^{-6}$ ) de telle sorte que la contrainte de vitesse constante dans  $C$  soit suffisamment bien vérifiée ( $\mathbf{V}_{\epsilon} \simeq \mathbf{V}$ ).

## B.4.4 Résolution des problèmes de point selle

### B.4.4.1 Contrainte d'incompressibilité

La contrainte d'incompressibilité  $\mathbf{V} \in K_{\nabla}$  est imposée par dualité. Il s'agit d'une méthode classique pour l'équation de Navier-Stokes (problème mixte) [64, 139], dans laquelle le champ de pression est le multiplicateur de Lagrange. Le couple vitesse-pression est approché par des éléments mixtes  $\mathbb{P}^1$ -bulle/ $\mathbb{P}^1$  qui permettent d'assurer la stabilité de la méthode numérique [145, 146].

### B.4.4.2 Contrainte liée à l'immobilité du cylindre selon $x$

La contrainte liée au fil de suspension (pas de mouvement selon  $y$ ) est imposée par dualité. Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est calculé en utilisant le fait que l'application  $\lambda \rightarrow \mathbf{V}_{\lambda}$  est affine. La solution du problème (B.24) est recherchée dans  $H$  (la contrainte  $\mathbf{V} \in K_C$  a été relaxée par pénalisation). Cette solution est calculée pour les valeurs  $\lambda_0 = 0$  et  $\lambda_1 = 1$ ; ces solutions sont notées respectivement  $\mathbf{V}_0$  et  $\mathbf{V}_1$ .

Comme le problème est linéaire en  $\lambda$ , la solution  $(\mathbf{V}, p)$  est donnée par le principe de superposition :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \lambda(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \\ p &= p_0 + \lambda(p_1 - p_0), \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

qui vérifie bien les conditions aux limites et est bien solution de (B.24). La valeur de  $\lambda$  s'obtient en écrivant la contrainte d'absence de mouvement selon  $x$  :

$$\mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{V}_0 + \lambda \mathbf{e}_x \cdot \int_C (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) = 0, \quad (\text{B.52})$$

ce qui permet de calculer  $\lambda$ .

### B.4.5 Oscillations forcées du cylindre

Dans cette section, nous traitons le cas d'un cylindre dont le mouvement est imposé. Pour cela, nous modifions légèrement la méthode numérique.

Le mouvement uniforme dans  $C$  est géré par pénalisation. Nous imposons par dualité une vitesse moyenne nulle selon  $x$  et une vitesse moyenne  $V_{cible}$  sinusoïdale selon  $y$ . Le champ de vitesse  $\mathbf{V}$  doit ainsi vérifier :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{V} &= 0, \\ \mathbf{e}_y \cdot \int_C \mathbf{V} &= \|C\| V_{cible}. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Ces conditions sont imposées à l'aide de deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ . Le terme  $\lambda \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{u}$  de (B.24) est remplacé par  $\lambda_x \mathbf{e}_x \cdot \int_C \mathbf{u} + \lambda_y \mathbf{e}_y \cdot \int_C \mathbf{u}$ .

La contrainte liée aux multiplicateurs de Lagrange est affine : la solution du problème est calculée pour les valeurs  $(\lambda_x, \lambda_y) = (0, 0)$ ,  $(\lambda_x, \lambda_y) = (1, 0)$  et  $(\lambda_x, \lambda_y) = (0, 1)$ . Comme pour les oscillations libres, la solution recherchée est une combinaison linéaire des trois solutions obtenues pour les valeurs particulières de  $(\lambda_x, \lambda_y)$  ; les valeurs de  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  sont obtenues à partir de (B.53).

### B.4.6 Bilan : implantation sous FreeFem++

#### B.4.6.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle utilisée pour le problème des oscillations libres, d'unique inconnue  $\mathbf{V}$ , est la suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{n+1}} \rho^{n+1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} - \int_{\Omega^{n+1}} \left( (\rho_{n+1}^n \mathbf{V}_{n+1}^n) \circ \mathbf{X}_{n+1}^n \right) \cdot \mathbf{u} - (\Delta t) \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \\ & \lambda (\Delta t) \mathbf{e}_x \cdot \int_{C^{n+1}} \mathbf{u} + \frac{2(\Delta t)}{\epsilon} \int_{C^{n+1}} \nabla(\mathbf{V}) : \nabla(\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in \tilde{H}, \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

$$q \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \forall q \in \Lambda_\nabla. \quad (\text{B.55})$$

La formulation variationnelle, implantée sous FreeFem++ est donnée par B.4. Dans l'équation de Navier-Stokes, la pression est définie à une constante près. Il n'est pas possible de fixer directement cette constante dans FreeFem++, par exemple en fixant la valeur moyenne de la pression (par exemple  $p \in \Lambda_\nabla$ ). Le petit paramètre  $\varepsilon_p$  (typiquement  $10^{-9}$ ) permet de lever l'indétermination sur la valeur de  $p$  [64].

#### B.4.6.2 Algorithme

Lors d'une itération en temps, les opérations suivantes sont effectuées successivement :

1. résolution de la formulation variationnelle (B.54) pour  $\lambda_0 = 0$  et  $\lambda_1 = 1$ ,

```

problem NStokes([Vx,Vy,p],[ux,uy,q],solver=Croust)=
int2d(Th)(rho*Vx*ux + rho*Vy*uy
//
+eta*dt*(2*dx(Vx)*dx(ux)+dy(Vx)*dy(ux)+dx(Vy)*dx(uy)
+2*dy(Vy)*dy(uy)+dy(Vx)*dx(uy)+dx(Vy)*dy(ux))
//
+int2d(Th)
(-convect([Vxprec,Vyprec-c],-dt,rhoprec*Vxprec)*ux
-convect([Vxprec,Vyprec-c],-dt,rhoprec*Vyprec)*uy)
//
+int2d(Th)(eps*p*q - dt*(p*dx(ux)+p*dy(uy)
+ q*dx(Vx) + q*dy(Vy)))
//
//penalisation du mouvement uniforme
+int2d(Th)(2*car*dt*
(dx(Vx)*dx(ux)+dy(Vx)*dy(ux)+dx(Vy)*dx(uy)
+dy(Vy)*dy(uy))/epsilon)
//
//dualite pour la contrainte de point d'attache
+int2d(Th)(car*dt*ex*ux *lambda)
//
//force exterieure
-int2d(Th)(dt*(fx*ux + fy*uy))
//
//conditions aux bords
+on(2,4,Vx=0,Vy=0)
+on(1,Vx=Vpoiseuille,Vy=0);

```

rho	rhoprec	Vx	Vxprec	car	dt	Th	epsilon	eps	Vpoiseuille
$\rho^{n+1}$	$\rho^n$	$\mathbf{V}^{n+1} \cdot \mathbf{e}_x$	$\mathbf{V}^n \cdot \mathbf{e}_x$	$\chi_C$	$\Delta t$	$T_h^{n+1}$	$\epsilon$	$\epsilon_p$	Éq. (B.5)

FIGURE B.4 – Formulation variationnelle implantée dans FreeFem++. Le tableau donne la signification de certains noms utilisés dans le code.

2. *détermination de  $\lambda$*  en utilisant (B.52), puis de  $\mathbf{V}$  et  $p$  par combinaison linéaire, en utilisant (B.51),
3. *calcul de la vitesse du cylindre* grâce à la formule :

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{\|C\|} \int_C \mathbf{V}, \quad (\text{B.56})$$

4. *déplacement du maillage* à partir de  $\mathbf{V}_C$  (voir Éq. (B.34)),
5. *mise à jour* de  $\rho_{n+1}$ ,  $\rho_n$  et  $\mathbf{V}_n$ .

## B.5 Calcul des forces

La force hydrodynamique s'exerçant sur un solide est définie comme une intégrale de bord, sur l'interface entre le solide et le fluide. Numériquement, l'évaluation d'une intégrale de contour manque de précision, à cause du terme de gradient de vitesse qui n'est pas défini directement sur ce contour. Nous cherchons donc à exprimer la force sous la forme d'une intégrale portant sur tout le domaine fluide en n'utilisant que des intégrales de surface.

Pour calculer la force hydrodynamique selon  $x$  qui s'exerce sur le cylindre, nous construisons une fonction  $\mathbf{u}_r$  telle que :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= (1, 0) && \text{dans } C, \\ \mathbf{u}_r &= (0, 0) && \text{sur } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{B.57}$$

et qui est solution d'une équation de Laplace (ce dernier choix n'est pas le seul possible). La force hydrodynamique selon  $x$  vaut :

$$F_x = \int_{\partial C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x \tag{B.58}$$

$$= \int_{\partial C} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_r \tag{B.59}$$

$$= \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}_r + \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u}_r) \tag{B.60}$$

$$= \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}_r + \int_{\Omega_f} \mathbf{D}(\mathbf{V}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}_r) - \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot \mathbf{u}_r \tag{B.61}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \left( \rho^{n+1} \mathbf{V}^{n+1} - (\rho_{n+1}^n \mathbf{V}_{n+1}^n) \circ \mathbf{X}_{n+1}^n \right) \cdot \mathbf{u}_r \\ &\quad + \int_{\Omega_f} \mathbf{D}(\mathbf{V}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}_r) - \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot \mathbf{u}_r.\end{aligned}\tag{B.62}$$

La ligne (B.58) est la définition de la force hydrodynamique, la ligne (B.59) est obtenue grâce à la définition de  $\mathbf{u}_r$  (voir Éq. (B.57)), la ligne (B.60) est obtenue par la formule de Green, la ligne (B.61) vient du développement de  $\boldsymbol{\sigma}$  et de la symétrie de  $\mathbf{D}(\mathbf{V})$  et la dernière ligne (B.62) provient de l'équation de Navier-Stokes, dont  $\mathbf{V}$  est solution.

La force selon  $y$  est calculée en prenant  $\mathbf{u}_r = (0, 1)$  dans  $C$ .

La force de pression est calculée en utilisant l'intégrale de bord, car  $p$  est bien définie sur  $\partial C$ .

## B.6 Tests numériques

### B.6.1 Présentation des tests

Le but de cette section est de montrer que les paramètres effectivement choisis pour les simulations numériques sont situés dans la gamme pour laquelle les résultats ont convergé. Ces paramètres sont présentés en table B.1. Les tests sont réalisés pour les valeurs  $Re = 20$  et  $\rho_s = 1,19$  et  $D = 0,66$  (diamètre du cylindre) pour lesquelles le cylindre oscille spontanément. Les résultats numériques sont les caractéristiques de l'oscillation.

### B.6.2 Influence du maillage

La finesse du maillage est quantifiée par le paramètre  $m$ . Le nombre de nœuds et de triangles du maillage varient comme  $m^2$ . Le maillage pour  $m = 5$  est présenté en figure B.2.



TABLE B.1 – Valeurs par défaut des tests numériques.  $L$  est la longueur du domaine  $\Omega$ .

$m$	$\Delta t$	$\epsilon$	$\epsilon_p$	$L$
10	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	12

Le maillage choisi par défaut correspond à  $m = 10$  et comporte 6 342 nœuds et 12 192 triangles. Le maillage est plus fin près du cylindre, où le champ de vitesse est complexe et où le fluide passe par une ouverture faible. Il est plus fin en aval du cylindre qu'en amont, où le champ de vitesse est presque un simple profil de Poiseuille.

Les figures B.5a et B.5b montrent que l'amplitude  $A$  et la fréquence  $f$  des oscillations ont effectivement convergé pour la valeur choisie  $m = 10$ . Comme la finesse du maillage est le paramètre qui influe le plus sur le temps de calcul, le choix de  $m = 10$  correspond à la valeur la plus faible pour laquelle la convergence est atteinte.

La figure B.5c montre que la force selon  $x$ , calculée à partir de la méthode développée en section B.5, a effectivement convergé. Comme le cylindre est immobile en  $x$ , la somme des forces agissant sur le cylindre dans cette direction est nulle. Ces forces se réduisent à la force hydrodynamique et à la force de tension du fil, qui est reliée au multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  (voir Éq. (B.21)) : il est donc possible de calculer la force selon  $x$  à partir de  $\lambda$ . Cette valeur converge, et elle est bien égale à la valeur issue du calcul direct.

La figure B.5d montre que la force selon  $y$  et la force de pression selon  $y$  ont elles aussi convergé. Les valeurs de ces deux forces sont proches, mais rien ne l'impose *a priori*.

### B.6.3 Influence des autres paramètres

Dans cette section, nous étudions la convergence de l'amplitude et de la fréquence de l'oscillation pour les autres paramètres.

La longueur  $L$  du domaine  $\Omega$  choisie est assez grande, comme le montre la figure B.6. Cette longueur influe très faiblement sur le résultat, ce qui confirme le fait que l'oscillation du cylindre est liée à ce qui se passe près de celui-ci.

Le pas de temps a bien été choisi suffisamment petit, comme l'illustre la figure B.7. La figure B.8 montre qu'il en est de même pour le paramètre de pénalisation  $\epsilon$ .

Enfin, la figure B.9 montre que le paramètre qui permet de fixer la constante de la pression est bien choisi. D'autres tests ont montré que si ce paramètre est pris égal à zéro, le programme s'arrête parce que la matrice de rigidité n'est pas inversible.

### B.6.4 Bilan

Les graphes de cette section montrent que pour les valeurs de paramètres choisis, le facteur qui influe le plus sur la convergence est la finesse du maillage  $m$ . Les résultats ont convergé, à 5% près environ pour l'amplitude de l'oscillation, qui est le paramètre dont la convergence est la plus lente.

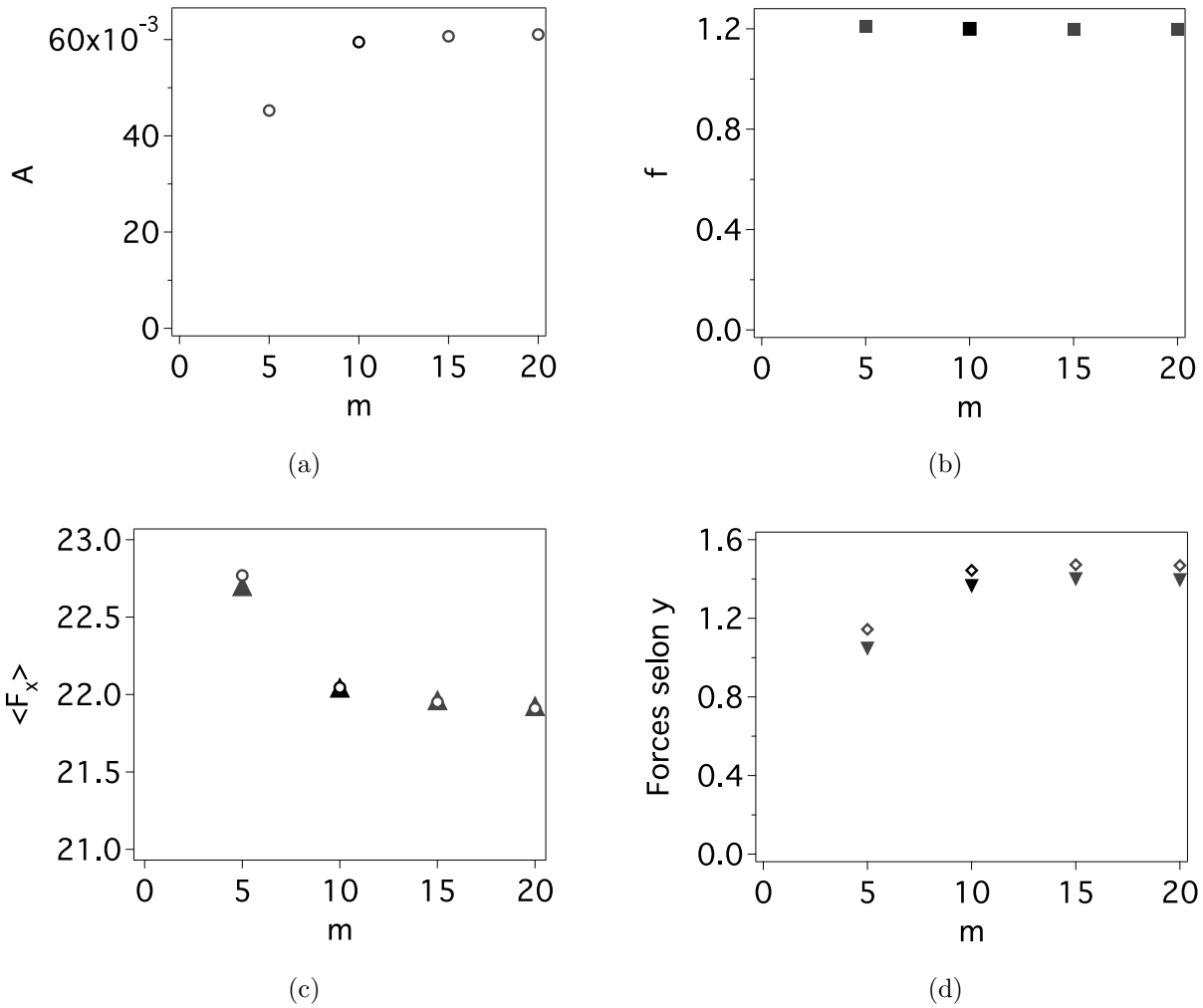


FIGURE B.5 – Résultats en fonctions de la finesse du maillage  $m$ . Les points en noir correspondent au paramètre de base  $m = 10$ . (a) : amplitude de l'oscillation. (b) : fréquence de l'oscillation. (c) : valeur moyenne de la force selon  $x$ .  $\blacktriangle$  : calcul direct (voir section B.5),  $\circ$  : calcul à partir de  $\lambda$ . (d) :  $\blacktriangledown$  : force selon  $y$ ,  $\diamond$  : force de pression selon  $y$ .

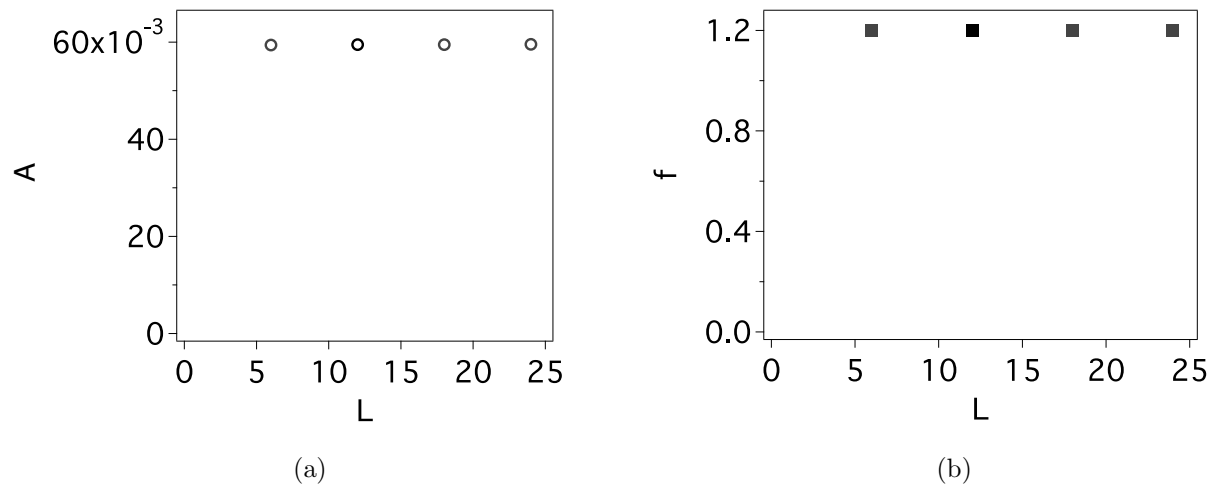


FIGURE B.6 – Résultats en fonctions de la longueur du domaine  $L$ . Les points en noir correspondent au paramètre de base  $L = 12$ . (a) : amplitude de l'oscillation. (b) : fréquence de l'oscillation.

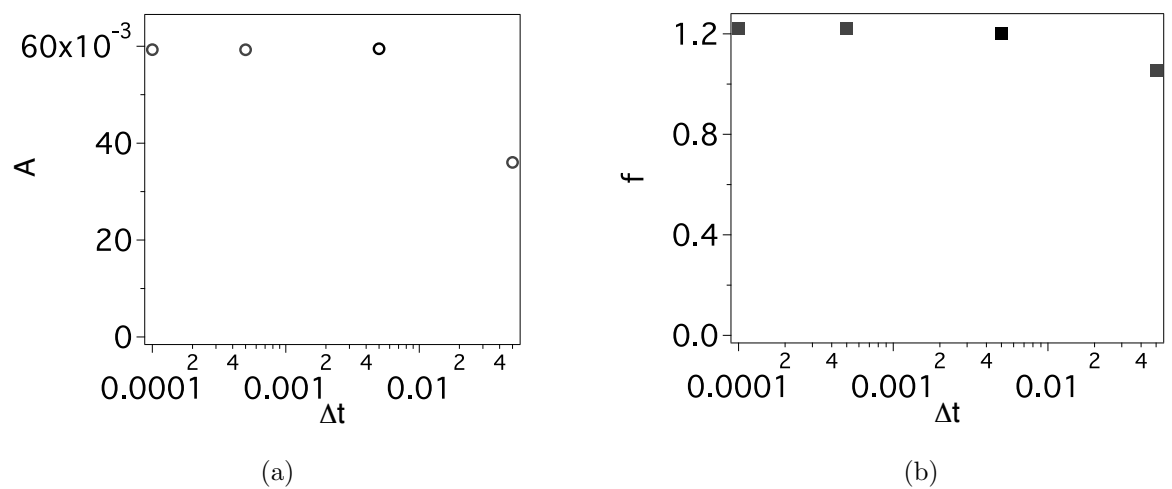


FIGURE B.7 – Résultats en fonctions du pas de temps  $\Delta t$ . Les points en noir correspondent au paramètre de base  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ . (a) : amplitude de l'oscillation. (b) : fréquence de l'oscillation.

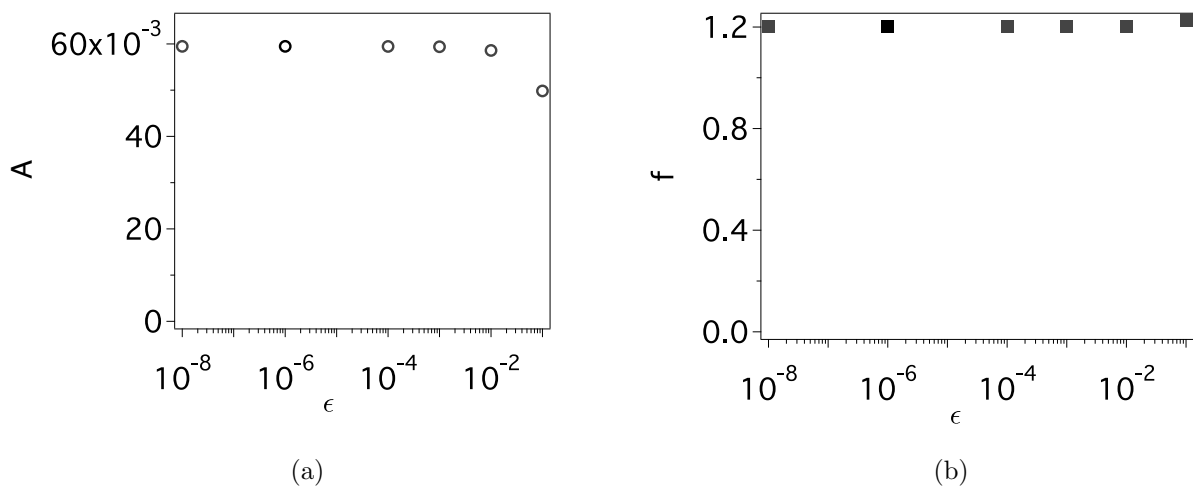


FIGURE B.8 – Résultats en fonctions du paramètre de pénalisation  $\epsilon$ . Les points en noir correspondent au paramètre de base  $\epsilon = 10^{-6}$ . (a) : amplitude de l'oscillation. (b) : fréquence de l'oscillation.

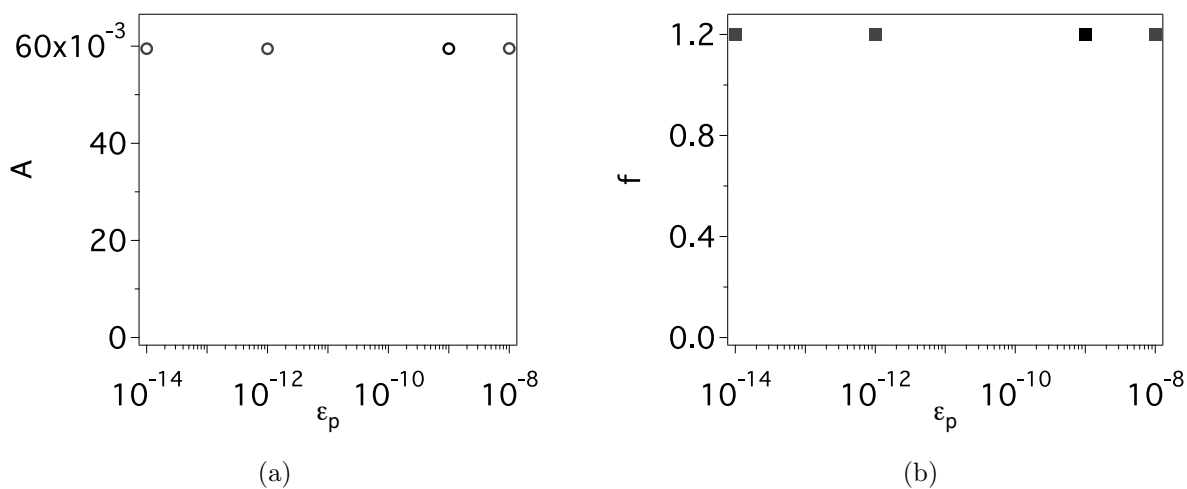


FIGURE B.9 – Résultats en fonctions du paramètre  $\epsilon_p$ , qui permet de fixer la constante de la pression. Les points en noir correspondent au paramètre de base  $\epsilon_p = 10^{-9}$ . (a) : amplitude de l'oscillation. (b) : fréquence de l'oscillation.

# Bibliographie

- [1] G. Taylor, “Analysis of the swimming of microscopic organisms”, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **209**, 447–451 (1951).
- [2] E. M. Purcell, “The efficiency of propulsion by a rotating flagellum”, *PNAS* **94**, 11307–11311 (1997).
- [3] C. P. Lowe, “Dynamics of filaments : modelling the dynamics of driven microfilaments”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B* **358**, 1543–1550 (2003).
- [4] M. Roper, R. Dreyfus, J. Baudry, M. Fermigier, J. Bibette, and H. Stone, “Do magnetic micro-swimmers move like eukaryotic cells?”, *Proc. R. Soc. A* **464**, 877–904 (2008).
- [5] J. Abbott, K. Peyer, M. Lagomarsino, L. Zhang, L. Dong, I. Kaliakatsos, and B. Nelson, “How should microrobots swim?”, *International Journal of Robotics Research* **28**, 1434–1447 (2009).
- [6] J. Männick, R. Driessen, P. Galajda, J. Keymer, and C. Dekker, “Bacterial growth and motility in sub-micron constrictions”, *PNAS* **106**, 14861–14866 (2009).
- [7] M. Binz, A. Lee, C. Edwards, and D. Nicolau, “Motility of bacteria in microfluidics structures”, *Microelectronic Engineering* **87**, 810–813 (2010).
- [8] M. Engstler, T. Pfohl, S. Herminghaus, M. Boshart, G. Wiegertjes, N. Heddergott, and P. Overath, “Hydrodynamic flow-mediated protein sorting on the cell surface of trypanosomes”, *Cell* **131**, 505–515 (2007).
- [9] M. Ramia, D. Tullock, and N. Phan-Thien, “The role of hydrodynamic interaction in the locomotion of microorganisms”, *Biophysical Journal* **65**, 755–778 (1993).
- [10] E. Lauga and T. Powers, “The hydrodynamics of swimming microorganisms”, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 096601 (2009).
- [11] A. Berke, L. Turner, H. Berg, and E. Lauga, “Hydrodynamic attraction of swimming microorganisms by surfaces”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 038102 (2008).
- [12] J. M. Stockie and S. I. Greeny, “Simulating the motion of flexible pulp fibres using the immersed boundary method”, *Journal of Computational Physics* **147**, 147–165 (1998).
- [13] A. Lindner, “Communication privée”, .
- [14] C.H. Bivins *et al.*, “New fibers for hydraulic fracturing”, *Oilfield Review* (2005).
- [15] C. Frei, “The thread injection”, Ph.D. thesis, ETH Zürich (2000).
- [16] C. Frei, P. Lüscher, and E. Wintermantel, “Thread-annular flow in vertical pipes”, *J. Fluid. Mech.* **410**, 185–210 (2000).
- [17] J. Selker, N. van de Giesen, M. Westhoff, W. Luxemburg, and M. B. Parlange, “Fibers optics opens window on stream dynamics”, *Geophysical Research Letters* **33**, L24401 (2006).

- [18] J. Selker, L. Thévenaz, H. Huwald, A. Mallet, W. Luxemburg, N. van de Giesen, M. Stejskal, J. Zeman, M. Westhoff, and M. B. Parlange, “Distributed fiber-optic temperature sensing for hydrologic systems”, *Water Resources Research* **42**, W12202 (2006).
- [19] O. Hoes, R. Schilperoort, W. Luxemburg, F. Clemens, and N. van de Giesen, “Locating illicit connections in storm water sewers using fiber-optic distributed temperature sensing”, *Water Research* **43**, 5187–5197 (2009).
- [20] B. Herzhaft and E. Guazzelli, “Experimental study of the sedimentation of dilute and semi-dilute suspensions of fibres”, *J. Fluid Mech.* **384**, 133–158 (1999).
- [21] B. Metzger, J. E. Butler, and E. Guazzelli, “Experimental investigation of the instability of a sedimenting suspension of fibres”, *J. Fluid Mech.* **575**, 307–332 (2007).
- [22] J. E. Butler and E. S. G. Shaqfeh, “Dynamic simulations of the inhomogeneous sedimentation of rigid fibres”, *J. Fluid Mech.* **468**, 205–237 (2002).
- [23] D. Saintillan, E. Darve, and E. S. G. Shaqfeh, “A smooth particle-mesh Ewald algorithm for Stokes suspension simulations : The sedimentation of fibers”, *Phys. Fluids* **17**, 033301 (2005).
- [24] K. Chiba and K. Nakamura, “Numerical solution of fiber suspension flow through a complex channel”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **78**, 167–185 (1998).
- [25] K. Yasuda, T. Kyuto, and N. Mori, “An experimental study of flow-induced fiber orientation and concentration distributions in a concentrated suspension flow through a slit channel containing a cylinder”, *Rheol. Acta* **43**, 137–145 (2004).
- [26] K. Yasuda, N. Ohara, and M. Muguruma, “Velocity profiles of suspensions flows through an abrupt contraction measured by magnetic resonance imaging”, *Chem. Eng. Technol.* **30**, 1036–1044 (2004).
- [27] G. Jeffery, “The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid”, *Proc. R. Soc. Ser. A* **102**, 161–179 (1923).
- [28] O. L. Forgacs and S. G. Mason, “Particle motions in sheared suspensions : X. Orbits of flexible threadlike particles.”, *Journal of Colloid Science* **14**, 473–491 (1959).
- [29] S. Lindström and T. Uesaka, “Simulation of the motion of flexible fibers in viscous fluid flow”, *Phys. Fluids* **19**, 113307 (2007).
- [30] Y. Young and M. Shelley, “Stretch-coil transition and transport of fibers in cellular flows”, *Phys. Rev. Lett* **99**, 058303 (2007).
- [31] E. Wandersman, N. Quennouz, M. Fermigier, A. Lindner, and O. du Roure, “Buckled in translation”, *Soft Matter*, *to be published* .
- [32] M. V. D’Angelo, B. Semin, G. Picard, M. Poitzsch, J. P. Hulin, and H. Auradou, “Single fiber transport in a fracture slit : influence of the wall roughness and of the fiber flexibility”, *Transp. Porous Med* DOI 10.1007/S11242–009–9507–x (2009).
- [33] J. Boffa, C. Allain, and J.-P. Hulin, “Experimental analysis of fracture rugosity in granular and compact rocks”, *Eur. Phys. J. AP* **2**, 281–289 (1998).
- [34] A. Boschan, H. Auradou, I. Ippolito, R. Chertcoff, and J.-P. Hulin, “Miscible displacement fronts of shear thinning fluids inside rough fractures”, *Water Reser. Res.* **43**, W03438 (2007).
- [35] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit, *Hydrodynamique physique* (EDP Sciences - CNRS Éditions) (2001).

- [36] J. Tillett, “Axial and transverse Stokes flow past slender axisymmetric bodies”, *J. Fluid. Mech.* **44**, 401–417 (1970).
- [37] G. K. Batchelor, “Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes flow”, *J. Fluid. Mech.* **44**, 419–440 (1970).
- [38] R. G. Cox, “The motion of long slender bodies in a viscous fluid. Part 1. general theory”, *J. Fluid. Mech.* **44**, 791–810 (1970).
- [39] J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics* (Martinus Nijhoff) (1986).
- [40] N. J. de Mestre, “Low-Reynolds-number fall of slender cylinders near boundaries”, *J. Fluid. Mech.* **58**, 641–656 (1973).
- [41] Y. Takaisi, “The drag on a circular cylinder moving with low speeds in a viscous liquid between two parallel walls”, *Phys. Fluids* **10**, 685–693 (1955).
- [42] E. Y. Harper and I.-D. Chang, “Drag on a cylinder between parallel walls in Stokes’ flow”, *Phys. Fluids* **10**, 83–88 (1967).
- [43] D. F. Katz, J. R. Blake, and S. L. Paveri-Fontana, “On the movement of slender bodies near plane boundaries at low Reynolds number”, *J. Fluid. Mech.* **72**, 529–540 (1975).
- [44] A. ben Richou, A. Ambari, M. Lebey, and J. Naciri, “Drag force on a cylinder midway between two parallel plates at  $Re \ll 1$ . Part 2 : moving uniformly (numerical and experimental)”, *Chem. Eng. Sci.* **60**, 2535–2543 (2005).
- [45] J. F. Stalnakar and R. G. Hussey, “Wall effects on cylinder at low Reynolds number”, *Phys. Fluids* **22**, 603 (1979).
- [46] C. M. White, “The drag of cylinders in fluids at low speeds”, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **186**, 472–479 (1945).
- [47] R. Bouard and M. Coutanceau, “Étude théorique et expérimentale de l’écoulement engendré par un cylindre en translation uniforme dans un fluide visqueux en régime de Stokes”, *Z. angew. Math. Phys.* **37**, 673–684 (1986).
- [48] R. Bouard, “Détermination de la traînée engendrée par un cylindre en translation pour des nombres de Reynolds intermédiaires”, *Z. angew. Math. Phys.* **48**, 584–596 (1997).
- [49] A. S. Dvinsky and A. S. Popel, “Motion of a rigid cylinder between parallel plates in Stokes flow”, *Computers & Fluids* **15**, 405–419 (1987).
- [50] A. ben Richou, A. Ambari, and J. K. Naciri, “Drag force on a cylinder midway between two parallel plates at very low Reynolds numbers-Part 1 : Poiseuille flow (numerical)”, *Chem. Eng. Sci.* **59**, 3215–3222 (2004).
- [51] S. Champmartin and A. Ambari, “Kinematics of a symmetrically confined cylindrical particle in a "Stokes-type" regime”, *Phys. Fluids* **19**, 073303 (2007).
- [52] L. Zovatto and G. Pedrizetti, “Flow about a circular cylinder between parallel walls”, *J. Fluid Mech.* **440**, 1305–1320 (2001).
- [53] H. Juárez, R. Scott, and R. M.-B. Bagheri, “Direct simulation of freely rotating cylinders in viscous flows by high-order finite element methods”, *Computers & Fluids* **29**, 547–582 (2000).
- [54] M. Sahin and R. G. Owens, “A numerical investigation of wall effects up to high blockage ratios on two-dimensional flow past a confined circular cylinder”, *Phys. Fluids* **16**, 1–25 (2004).

- [55] T. Zisis and E. Mitsoulis, “Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **105**, 1–20 (2002).
- [56] R. P. Bharti, R. P. Chhabra, and V. Eswaran, “Two-dimensional steady flow of power-law fluids across a circular cylinder in a plane confined channel : Wall effects and drag coefficients”, *Ind. Eng. Chem. Res.* **46**, 3820–3840 (2007).
- [57] M. A. Dhahir and K. Walters, “On non-Newtonian flow past a cylinder in a confined flow”, *J. Rheol* **33**, 781–804 (1989).
- [58] F. Rehim, F. Alaoui, S. B. Nasrallah, L. Doubriez, and J. Legrand, “Experimental investigation of a confined flow downstream of a circular cylinder centred between two parallel walls”, *Journal of Fluids and Structures* **24**, 855–882 (2008).
- [59] R. Weast and M. Astle, *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press) (1982).
- [60] J. Segur and H. Oberstar, “Viscosity of glycerol and its aqueous solutions”, *Industrial and engineering chemistry* **43**, 2117–2120 (1951).
- [61] Dow Chemical tables, <http://www.dow.com/glycerine/resources/table18.htm>, [http://www.dow.com/glycerine/resources/dens\\_sg.htm](http://www.dow.com/glycerine/resources/dens_sg.htm).
- [62] E. M. Sparrow, S. H. Lin, and T. S. Lundgren, “Flow development in the hydrodynamic entrance region of tubes and ducts”, *Physics of Fluids* **7**, 338–347 (1964).
- [63] F. Waleffe, “Exact coherent structures in channel flow”, *J. Fluid Mech.* **435**, 93–102 (2001).
- [64] F. Hecht, O. Pironneau, A. le Hyaric, and K. Ohtsuka, *FreeFem++ manual* (<http://www.freefem.org/ff++/>) (2005).
- [65] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen, “A constitutive law for dense granular flows”, *Nature Letters* **441**, 727–730 (2006).
- [66] O. H. Faxen, “Forces exerted on a rigid cylinder in a viscous fluid between two parallel fixed planes”, *Proc. R. Swed. Acad. Eng.* **187**, 1 (1946).
- [67] S. del Pino and O. Pironneau, “A fictitious domain based on general PDE’s solvers”, in *Proc. ECCOMAS 2001*, edited by K. Morgan (Wiley, Sept Swansea) (2002).
- [68] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, “Gmsh : A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and postprocessing facilities”, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **79**, 1309 (2009).
- [69] M.-H. Noël, B. Semin, J.-P. Hulin, and H. Auradou, “Viscosimeter by drag force measurements”, en préparation .
- [70] P. Gondret, N. Rakotomalala, M. Rabaud, D. Salin, and P. Watzky, “Viscous parallel flows in finite aspect hele-shaw cell : Analytical and numerical results”, *Phys. Fluids* **9**, 1841–1843 (1997).
- [71] S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics* (Butterworth-Heinemann) (1991).
- [72] G. Segré and A. Silberberg, “Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2 : Experimental results and interpretation.”, *J. Fluid. Mech.* **14**, 136 (1962).
- [73] J. P. Matas, J. Morris, and E. Guazzelli, “Lateral forces on a sphere”, *Oil and Gas Science and technology - Rev. IFP* **59**, 59–70 (2004).
- [74] P. Anagnostopoulos and P. W. Bearman, “Response Characteristics of a vortex-excited cylinder at low Reynolds number ”, *Journal of Fluids and Structures* **6**, 39–50 (1992).



- [75] C. Williamson and R. Govardhan, “Vortex-Induced Vibrations”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36**, 413–455 (2004).
- [76] R. Gabbai and H. Benaroya, “An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders”, *Journal of Sound and Vibration* **282**, 575–616 (2005).
- [77] M. Facchinetti, E. de Langre, and F. Biolley, “Coupling of structure and wake oscillators in vortex induced vibrations”, *Journal of Fluids and Structures* **19**, 123–140 (2004).
- [78] C. Williamson and R. Govardhan, “A brief review of recent results in vortex-induced vibrations”, *J. Wind Engng Ind. Aerodyn.* **96**, 713–735 (2008).
- [79] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics* (Cambridge University Press) (2000).
- [80] C. Norberg, “Fluctuating lift on a circular cylinder : review and new measurements”, *J. Fluids Struct.* **17**, 57–96 (2003).
- [81] B. Kumar and S. Mittal, “Prediction of the critical Reynolds number for flow past a circular cylinder”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195**, 6046–6058 (2006).
- [82] P. Monkewitz, “The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers”, *Phys. of Fluids* **31**, 999–1006 (1988).
- [83] C. Williamson, “Vortex Dynamics in the cylinder wake”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477–539 (1996).
- [84] E. de Langre, *Fluides et solides* (Éditions de l’École polytechnique) (2001).
- [85] R. Willden and J. Graham, “Three distinct response regime for the transverse Vortex-Induced Vibrations of circular cylinder at low Reynolds numbers”, *J. Fluids Struct.* **22**, 885–895 (2006).
- [86] E. de Langre, “Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter”, *J. Fluids Struct.* **22**, 783–791 (2006).
- [87] X. Amandolèse and P. Hémon, “Vortex-induced vibration of a square cylinder in wind tunnel”, *C. R. Mecanique* **338**, 12–17 (2010).
- [88] C. Williamson and R. Govardhan, “Modes of vortex formation and frequency of a freely vibrating cylinder”, *J. Fluid Mech.* **420**, 85–130 (2000).
- [89] D. Shiels, A. Leonard, and A. Roshko, “Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters”, *Journal of Fluids and Structures* **15**, 3–21 (2001).
- [90] R. Govardhan and C. Williamson, “Resonance forever : existence of a critical mass and an infinite regime of resonance in vortex-induced vibration”, *J. Fluid Mech.* **473**, 147–166 (2002).
- [91] M. Horowitz and C. Williamson, “Dynamics of a rising and falling cylinder”, *J. Fluids Struct.* **22**, 837–843 (2006).
- [92] M. Lazarkov and J. Revstedt, “Flow-induced motion of a short circular cylinder spanning a rectangular channel”, *J. Fluids Struct.* **24**, 449–446 (2008).
- [93] T. Prasanth, S. Behara, S. Singh, and S. Mittal, “Effect of blockage on vortex-induced vibrations at low Reynolds numbers”, *J. Fluids Struct.* **22**, 865–876 (2006).
- [94] M. Sánchez-Sanz and A. Velazquez, “Vortex-induced vibration of a prism in internal flow”, *J. Fluid Mech.* **641**, 431–440 (2009).

- [95] A. Sharma and V. Eswaran, “Effect of channel confinement on the two-dimensional laminar flow and heat transfer across a square cylinder”, *Numer. Heat Transfer, Part A*. **47**, 79–107 (2005).
- [96] C. Cossu and L. Morino, “On the instability of a spring-mounted circular cylinder in a viscous flow at low Reynolds numbers”, *J. Fluids Struct.* **14**, 183–196 (2000).
- [97] S. Mittal and S. Singh, “Vortex-induced vibrations at subcritical  $Re$ ”, *J. Fluid Mech.* **534**, 185–194 (2005).
- [98] F. H. Shair, A. S. Grove, E. E. Petersen, and A. Acrivos, “The effect of confining walls on the stability of the steady wake behind a circular cylinder”, *J. Fluid Mech.* **17**, 546–550 (1963).
- [99] R. Duffait and J.-P. Lièvre, *Expériences d’électronique - Agrégation de Sciences Physiques* (Bréal) (2000).
- [100] A. Placzek, J.-P. Sigrist, and A. Hamdouni, “Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low-Reynolds number : forced and free oscillations”, *Computers and fluids* **38**, 80–100 (2009).
- [101] L. Bocquet, J.-P. Faroux, and J. Renault, *Toute la mécanique* (Dunod) (2002).
- [102] F. Charru, *Instabilités hydrodynamiques* (EDP Sciences, CNRS Éditions) (2007).
- [103] P. Manneville, *Dynamique non-linéaire et Chaos* (Cours de M2, École polytechnique) (2007).
- [104] C. Lei, L. Chang, and K. Kavanagh, “Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder”, *Journal of Wind Engineering* **80**, 263–286 (1999).
- [105] L. Zenq, F. Najjar, S. Balachandar, and P. Fischer, “Forces on a finite-sized particle located close to a wall in a linear shear flow”, *Phys. Fluids* **21**, 033302 (2009).
- [106] J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre, “Accelerated flows past a rigid sphere or spherical bubble. Part 1. steady straining flow”, *J. Fluid Mech.* **284**, 97–135 (1995).
- [107] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge) (2007).
- [108] J. Illingworth and J. Kittler, “A survey of the hough transform”, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **44**, 87–116 (1988).
- [109] L. Xu, E. Oja, and P. Kultanen, “A new curve detection method : randomized Hough transform (RHT)”, *Pattern Recognition Letters* **11**, 331–338 (1990).
- [110] W. C. Lam, K. S. Yuen, and D. N. Leung, *Fourier parameterization provide uniform bounded Hough Space*, volume 719 of *Lecture Notes in Computer Science*, 183–190 (Springer Verlag, Berlin) (1993).
- [111] P. A. Toft, “Using the generalized radon transform for detection of curves in noisy images”, *Proceedings of the IEEE ICASSP-96 Conference* **4**, 2219–2222 (1996).
- [112] W. Lu and J. Tan, “Detection of incomplete ellipse in images with strong noise by iterative randomized Hough Transform (IRHT)”, *Pattern Recognition* **41**, 1268–1279 (2008).
- [113] S. R. Aylward and E. Bulitt, “Initialisation, noise, singularities, and scale in height ridge traversal for tubular object”, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **21**, 61–75 (2002).

- [114] T. Deschamps and L. D. Cohen, “Fast extraction of minimal paths in 3D images and application to virtual endoscopy”, *Medical Image Analysis* **5**, 281–299 (2001).
- [115] D. Mueller and A. Maeder, “Robust semi-automated path extraction for visualising stenosis of the coronary arteries”, *Computerized Medical Imaging and Graphics* **32**, 463–475 (2008).
- [116] O. Wink, A. F. Frangi, B. Verdonck, M. A. Viergever, and W. J. Niessen, “3D MRA coronary axis determination using a minimum cost path approach”, *Magnetic Resonance in Medicine* **47**, 1169–1175 (2002).
- [117] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro, “Geodesic active contours”, *International Journal of Computer Vision* **22**, 61–79 (1997).
- [118] L. M. Lorigo, O. D. Faugeras, W. E. L. Grimson, R. Keriven, R. Kikinis, A. Nabavi, and C. F. Westin, “Curves : Curve evolution for vessel segmentation”, *Medical Image Analysis* **5**, 195–206 (2001).
- [119] R. J. Adrian, “Particle-Imaging techniques for Experimental Fluid Mechanics”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 261–304 (1991).
- [120] J. Znaïen, “Étude locale du mélange induit par gravité de deux fluides dans la géométrie confinée d’un tube incliné”, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11 (2009).
- [121] F. Hild and S. Roux, “Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties - a review”, *Strain* **42**, 69–80 (2006).
- [122] F. Hild and S. Roux, “Measuring stress intensity factors with a camera : integrated digital image correlation (I-DIC)”, *Comptes Rendus de Mécanique* **334**, 8–12 (2006).
- [123] J. Rethore, S. Roux, and F. Hild, “From pictures to extended finite elements : extended digital image correlation (X-DIC)”, *Comptes Rendus de Mécanique* **335**, 131–137 (2007).
- [124] M. François, “Corrélation d’images”, Cours de master 2, ENS Cachan (2009).
- [125] S. Aja-Fernández, G. Vegas-Sánchez-Ferrero, M. Martín-Fernández, and C. Alberola-López, “Automatic noise estimation in images using local statistics. Additive and multiplicative cases”, *Image and Vision Computing* **27**, 3756–3770 (2009).
- [126] C. Boncelet, *The Essential Guide to Image Processing* (Elsevier, Amsterdam) (2009).
- [127] M. R. Spiegel, J. Liu, and S. Lipschutz, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (McGraw-Hill) (1999).
- [128] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides* (Dunod, Paris) (1988).
- [129] A. Davaille, A. Limare, F. Tuitou, I. Kumagai, and J. Vatteville, “Anatomy of a laminar starting plume at high Prandtl number”, *Exp. in Fluids*, *accepted* (2010).
- [130] A. Davaille, S. Androvandi, J. Vatteville, A. Limare, V. Vidal, and M. Lebars, “Thermal boudaries layer instabilities in viscous fluids”, in *Proc. ISFV13* (Nice, France) (2008).
- [131] M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron, “Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1-Principle and definition”, *International Journal of Solids and Structures* **39**, 2691–2705 (2002).
- [132] E. Purcell, “Life at low Reynolds number”, *American Journal of Physics* **45**, 3–11 (1977).

- [133] M. Fermigier, *Hydrodynamique physique* (Dunod) (1999).
- [134] N. Coq, O. du Roure, J. Marthelot, D. Bartolo, and M. Fermigier, “Rotational dynamics of a soft filament : Wrapping transition and propulsive forces”, *Phys. Fluids* **20**, 051703 (2008).
- [135] N. Ribe, M. Habibi, and D. Bonn, “Stability of liquid rope coiling”, *Phys. Fluids* **18**, 0841029 (2006).
- [136] L. Landau and E. Lifschitz, *Theory of elasticity, vol. 7* (Butterworth-Heinemann) (1986).
- [137] M. Habibi, N. Ribe, and D. Bonn, “Coiling of elastic ropes”, *Phys. Rev. Lett* **99**, 154302 (2007).
- [138] J.-J. Marigo and N. Meunier, “Hierarchy of one-dimensional models in nonlinear elasticity”, *Journal of Elasticity* **83**, 1–28 (2006).
- [139] J. Janela, A. Lefebvre, and B. Maury, “A penalty method for the simulation of fluid-rigid body interaction”, *ESAIM : Proceedings* **14**, 115–123 (2005).
- [140] P. Causin, J. Gerbeau, and F. Nobile, “Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **194**, 4506–4527 (2005).
- [141] C. W. Hirt, A. A. Amsden, and J. L. Cook, “An Arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds”, *J. Comput. Phys.* **14**, 227–253 (1974).
- [142] B. Maury, “Characteristics ALE method for the unsteady 3D Navier-Stokes equations with a free surface”, *Comp. Fluid Dyn.* **6**, 175–188 (1996).
- [143] A. Decoene, “Modèle hydrostatique pour les écoulements à surface libre tridimensionnels et schéma numériques”, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2006).
- [144] A. Decoene and J.-F. Gerbeau, “Sigma transformation and ALE formulation for three-dimensional free surface flows”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **59**, 357–386 (2009).
- [145] B. Maury, “Éléments finis et optimisation sous contraintes”, Cours de master 2, Université Paris Sud (2009).
- [146] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation* (Éditions de l’École polytechnique) (2006).



# Résumé

Le déplacement d'objets allongés dans un fluide se retrouve dans de nombreux domaines tels que la récupération du pétrole, la production du papier ou la nage de micro-organismes. Dans ce travail, nous étudions le comportement d'une fibre cylindrique longue dans un écoulement en géométrie confinée (fracture, canal microfluidique). Dans un premier temps, les forces de trainée exercées sur la fibre ont été déterminées expérimentalement et numériquement en fonction de son orientation et de sa position dans l'ouverture. Lorsque la fibre est parallèle à l'écoulement, elle le perturbe faiblement et une modélisation 2D est suffisante; au contraire, lorsqu'elle est perpendiculaire, l'écoulement devient 3D quand le blocage est incomplet. Pour cette orientation, la portance est suffisante pour maintenir l'objet au centre de l'écoulement. Pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 20, cette position devient instable : le cylindre oscille entre les deux parois. Le seuil de l'instabilité est inférieur au seuil d'émission des tourbillons de Bénard-Von Kármán. La position du cylindre est modélisée par une équation de Van der Pol qui prédit quantitativement la bifurcation de Hopf du système. Une interprétation hydrodynamique des coefficients de cette équation est présentée. Nous présentons et validons ensuite une méthode de traitement d'image, qui détermine de manière analytique la forme d'une fibre avec une précision sub-pixel. De plus, l'angle du vecteur tangent et la courbure de la fibre - essentielle car reliée à son moment fléchissant - sont mesurés avec précision.

**Mots clés :** instabilité oscillatoire, couplage fluide-structure, corrélation d'images, forces hydrodynamiques, milieux poreux et fracturés, fibre flexible

# Abstract

The motion of elongated objects in a fluid is encountered in many scientific fields, ranging from oil recovery and paper production to microorganism swimming. In the present thesis we study the behavior of a long cylindrical fiber in a confined flow (fracture, microfluidic channel). We first determine both experimentally and numerically the drag on this object as a function of its orientation and position in the aperture. A fiber parallel to the flow only slightly perturbs the flow, and the force on it can be estimated using 2D models. On the contrary, if it is perpendicular to the flow, the latter becomes 3D if blockage is partial. In this configuration, the lift is sufficient to keep the cylinder in the middle of the flow. For Reynolds numbers higher than 20, this position becomes unstable and the cylinder oscillates between the walls. The threshold of this instability is lower than that of Bénard-Von Kármán vortex shedding. The position of the cylinder satisfies a Van der Pol equation, which allows for a quantitative prediction of the Hopf bifurcation of the system. A hydrodynamic interpretation of the coefficients of this equation is given. We also develop and validate a new image processing method, which give the shape of the fiber with a sub-pixel precision. Moreover, the tangent vector angle and the curvature, of interest because it is related to the bending moment, are accurately measured.

**Keywords :** oscillatory instability, flow-structure coupling, image correlation, hydrodynamic forces, porous and fractured media, flexible fiber